

**Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение дополнительного образования детей  
«Заочная физико-техническая школа  
Московского физико-технического института  
(государственного университета)»**

**ФИЗИКА**

**Изменение и сохранение  
импульса и энергии в механике**

Задание №1 для 10-х классов

(2013 – 2014 учебный год)



г. Долгопрудный, 2013

*Составитель:* В.И. Плис, доцент кафедры общей физики МФТИ.

Физика: задание №1 для 10-х классов (2013 – 2014 учебный год), 2013, 28 с.

**Дата отправления заданий по физике и математике – 29 сентября 2013 г.**

Учащийся должен стараться выполнять все задачи и контрольные вопросы в заданиях. Некоторая часть теоретического материала, а также часть задач и контрольных вопросов, являются сложными и требуют от учащегося больше усилий при изучении и решении. В целях повышения эффективности работы с материалом они обозначены символом «\*» (звёздочка). Мы рекомендуем приступать к этим задачам и контрольным вопросам в последнюю очередь, разобравшись вначале с более простыми.

Составитель:

**Плис Валерий Иванович**

Подписано 21.07.13. Формат 60×90 1/16.

Бумага типографская. Печать офсетная. Усл. печ. л. 1,75

Уч.-изд. л. 1,55. Тираж 1100. Заказ №7-з.

Заочная физико-техническая школа  
Московского физико-технического института  
(государственного университета)

ООО «Печатный салон ШАНС»

Институтский пер., 9, г. Долгопрудный, Москов. обл., 141700.

ЗФТШ, тел./факс (495) 408-51-45 – **заочное отделение,**

тел./факс (498) 744-63-51 – **очно-заочное отделение,**

тел. (499) 755-5580 – **очное отделение.**

*e-mail: [zftsh@mail.mipt.ru](mailto:zftsh@mail.mipt.ru)*

**Наш сайт: [www.school.mipt.ru](http://www.school.mipt.ru)**

© ЗФТШ, 2013

## §1. Введение

Настоящее задание посвящено законам изменения и сохранения импульса и энергии для материальной точки и систем материальных точек в механике. Повторение этих разделов вызвано двумя причинами: первая обусловлена важностью этих законов в физике; вторая причина связана с тем, что часть учащихся в 10-ом классе начинает обучаться в ЗФТШ впервые.

Обращаем внимание читателя, что перед работой с Заданием ему следует изучить (повторить) соответствующие разделы школьного учебника и выполнить упражнения, представленные в учебнике.

Механика – наука, изучающая движение тел и способы описания движения и взаимодействия тел. Для описания механического движения следует выбрать *систему отсчёта*, представляющую собой *тело отсчёта*, с которым неподвижно связывают *систему координат*, и *часы* для регистрации положения точки в различные моменты времени.

В механике Ньютона, т. е. при рассмотрении движений со скоростями, малыми по сравнению со скоростью света, показания неподвижных и движущихся часов считаются одинаковыми.

Выбор систем отсчёта диктуется соображениями удобства и простоты описания движения.

Для математически точного описания движения используются *модели физических тел*. *Материальная точка* – модель тела, применяемая в механике в тех случаях, когда размерами тела можно пренебречь по сравнению с характерными расстояниями, на которых рассматривается движение тела. В геометрии для описания таких тел используется понятие точки. Положение материальной точки в пространстве определяется положением изображающей её геометрической точки. Единственная механическая (негеометрическая) характеристика материальной точки – её масса.

## §2. Законы Ньютона

### Импульс или количество движения материальной точки

В основе динамики материальной точки лежат законы (аксиомы) Ньютона. Напомним ключевые определения и законы.

Система отсчёта, в которой любая материальная точка, не взаимодействующая с другими телами (такая точка называется свободной), движется равномерно и прямолинейно или покоится, называется инерциальной.

**1-й закон:** *инерциальные системы отсчёта (ИСО) существуют,*

**2-й закон:** *в ИСО приращение импульса материальной точки пропорционально силе и происходит по направлению силы:*

$$\Delta \vec{p} = \vec{F} \cdot \Delta t. \quad (1)$$

Импульсом (или количеством движения) материальной точки называют физическую величину, определяемую произведением её массы на вектор скорости в данной системе отсчёта:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}.$$

$\vec{F}$  – сумма сил, действующих на материальную точку. Величину  $\vec{F} \cdot \Delta t$  называют импульсом силы за время от  $t$  до  $t + \Delta t$ , в течение которого силу можно считать неизменной по величине и направлению. Величину  $\Delta \vec{p} = \vec{p}(t + \Delta t) - \vec{p}(t)$  называют приращением импульса материальной точки за время от  $t$  до  $t + \Delta t$ . Поэтому второй закон Ньютона для материальной точки можно сформулировать так:

*в ИСО приращение импульса материальной точки равно импульсу силы.*

Отметим, что при изучении динамики второй закон Ньютона часто формулируют следующим образом:

*в ИСО ускорение материальной точки прямо пропорционально сумме сил, действующих на неё, и обратно пропорционально её массе:*

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}. \quad (2)$$

Если масса тела остаётся неизменной, то  $\Delta \vec{p} = \Delta(m\vec{v}) = m\Delta\vec{v}$  и соотношение (1) принимает вид  $m\Delta\vec{v} = \vec{F} \Delta t$ . С учётом  $\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$  приходим к эквивалентности соотношений (1) и (2) в рассматриваемом случае.

В настоящем Задании представлены задачи, для решения которых привлекается второй закон Ньютона (см.(1)), устанавливающий равенство приращений импульса материальной точки и импульса силы.

**3-й закон:** при взаимодействии двух материальных точек сила  $\vec{F}_{12}$ , действующая на первую материальную точку со стороны второй, равна по величине и противоположна по направлению силе  $\vec{F}_{21}$ , действующей со стороны первой материальной точки на вторую,

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}.$$

Третий закон Ньютона это совокупность утверждений:

- 1) силы возникают парами и имеют одинаковую природу, они приложены к разным материальным точкам,
- 2) эти силы равны по величине,
- 3) они действуют вдоль одной прямой в противоположных направлениях.

Заметим, что согласно третьему закону Ньютона обе силы должны быть равны по величине в любой момент времени независимо от движения взаимодействующих тел. Другими словами, если в системе двух взаимодействующих тел изменить положение одного из тел, то это изменение мгновенно скажется на другом теле, как бы далеко оно ни находилось. На самом деле скорость распространения взаимодействий конечная; она не может превзойти скорость света в вакууме. Поэтому третий закон Ньютона имеет определённые пределы применимости. Однако в классической механике при малых скоростях взаимодействующих тел он выполняется с большой точностью.

Второй закон Ньютона (уравнение движения) можно представить в виде теоремы об изменении импульса материальной точки:

$$\frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \vec{F}. \quad (3)$$

*Скорость изменения импульса материальной точки в инерциальной системе отсчёта равна сумме сил, действующих на эту точку.*

Напомним, что для решения задач динамики материальной точки следует:

- привести «моментальную фотографию» движущегося тела, указать приложенные к нему силы;
- выбрать инерциальную систему отсчёта;
- составить уравнение (3);

перейти к проекциям приращения импульса и сил на те или иные направления;

решить полученную систему.

Рассмотрим характерные примеры.

**Пример № 1.** К телу, первоначально покоившемуся на шероховатой горизонтальной поверхности, прикладывают в течение времени  $t_1 = 10$  с горизонтальную силу величиной  $F = 5$  Н. После прекращения действия силы тело движется до остановки  $t_2 = 40$  с. Определите величину  $F_{\text{тр}}$  силы трения скольжения, считая её постоянной.

**Решение.** На рис. 1 показаны ИСО и силы, действующие на тело в процессе разгона. По второму закону Ньютона

$$\frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = M \vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}} + \vec{F}.$$

Переходя к проекциям на горизонтальную ось, находим элементарные приращения импульса в процессе разгона

$$\Delta p_x = (F - F_{\text{тр}}) \Delta t,$$

и в процессе торможения ( $F = 0$ )

$$\Delta p_x = -F_{\text{тр}} \Delta t.$$

Просуммируем все приращения импульса тела от старта до остановки

$$\sum \Delta p_x = \sum_{0 \leq t \leq t_1} (F - F_{\text{тр}}) \Delta t + \sum_{t_1 \leq t \leq t_1 + t_2} (-F_{\text{тр}}) \Delta t.$$

Напомним, что для любой физической величины сумма приращений равна разности конечного и начального значений. Тогда

$$p_{x \text{ конечн}} - p_{x \text{ начальн}} = (F - F_{\text{тр}}) t_1 + (-F_{\text{тр}}) t_2.$$

С учётом равенств  $p_{x \text{ конечн}} = 0$ ,  $p_{x \text{ начальн}} = 0$  и независимости сил от времени приходим к ответу на вопрос задачи:

$$F_{\text{тр}} = \frac{t_1}{t_1 + t_2} F = \frac{10}{10 + 40} \cdot 5 = 1 \text{ Н.}$$

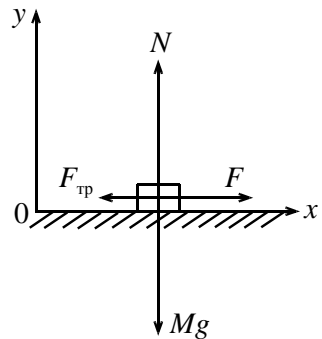


Рис. 1

Далее рассмотрим пример, в котором одна из сил зависит от времени.

**Пример № 2.** На какое максимальное расстояние  $L_{\max}$  улетит мяч, если в процессе удара футболист действует на мяч постоянной по направлению силой, величина которой изменяется по закону, представленному на рис. 2. Длительность удара  $\tau = 8 \cdot 10^{-3}$  с, максимальная сила  $F_{\max} = 3,5 \cdot 10^3$  Н, масса мяча

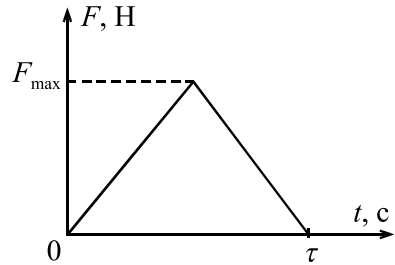


Рис. 2

$m = 0,5$  кг. Здесь и далее ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>. Сопротивление воздуха не учитывайте.

**Решение.** В процессе удара на мяч действуют две силы:  $mg = 0,5 \cdot 10 = 5$  Н — тяжести и сила  $\vec{F}$ , с которой футболист действует на мяч,

$$F \leq F_{\max} = 3,5 \cdot 10^3 \text{ Н.}$$

Так как  $mg \ll F_{\max}$ , силой тяжести пренебрежём. Из кинематики известно, что максимальная дальность полёта наблюдается при старте под углом  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ . Процесс удара показан на рис. 3.

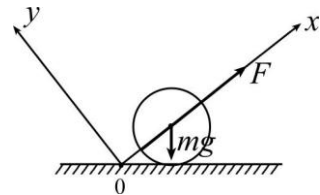


Рис. 3

По второму закону Ньютона *приращение импульса равно импульсу силы*  $\Delta \vec{p} = \vec{F} \cdot \Delta t$ . Переходя к проекциям приращения импульса и силы на ось  $ox$ , получаем

$$\Delta p_x = F \Delta t.$$

Просуммируем элементарные приращения импульса мяча за время удара

$$\sum \Delta p_x = mV - 0 = \sum_{0 \leq t \leq \tau} F \Delta t.$$

Импульс силы  $\sum_{0 \leq t \leq \tau} F(t) \Delta t$  за время удара численно равен площади под графиком зависимости этой силы от времени (каждое слагаемое  $F(t) \Delta t$  в импульсе силы можно интерпретировать как площадь элементарного прямоугольника со сторонами  $F(t)$  и  $\Delta t$  на графике зависимости  $F(t)$ ). Тогда импульс силы  $F$  за время удара равен

$$\sum_{0 \leq t \leq \tau} F \Delta t = \frac{F_{\max} \tau}{2}$$

и в рассматриваемом случае не зависит от того, в какой именно момент времени сила достигает максимального значения (площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту!). Далее находим импульс мяча в момент окончания действия силы

$$mv = \frac{1}{2} F_{\max} \cdot \tau.$$

Отсюда находим начальную скорость полёта мяча

$$v = \frac{F_{\max} \cdot \tau}{2m} = \frac{3,5 \cdot 10^3 \cdot 8 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 0,5} = 28 \text{ м/с}$$

и максимальную дальность (старт под углом  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ) полёта

$$L_{\max} = \frac{v^2}{g} = \frac{28^2}{10} \approx 78 \text{ м.}$$

В рассматриваемом модельном примере получен несколько завышенный по сравнению с наблюдениями результат.

На вступительных испытаниях и олимпиадах в вузах России регулярно предлагаются задачи динамики, в которых наряду с «традиционными» силами: силой тяжести, силой Архимеда и т. д., на тело действует сила лобового сопротивления. Такая сила возникает, например, при движении тел в жидкостях и газах. Вопрос о движении тел в жидкостях и газах имеет большое практическое значение. Знакомство с действием такого рода сил уместно начинать, как это принято в физике, с простейших модельных зависимостей, в которых сила сопротивления принимается пропорциональной скорости или её квадрату.



**\* Пример № 3.** Мяч, брошенный с горизонтальной поверхности земли под углом  $\alpha = 60^\circ$  к горизонту со скоростью  $v = 10$  м/с, упал на землю, имея вертикальную составляющую скорости по абсолютной величине на  $\delta = 30\%$  меньшую, чем при бросании. Найдите время полёта мяча. Считать, что сила сопротивления движению мяча пропорциональна его скорости.

**Решение.** Согласно второму закону Ньютона *приращение импульса пропорционально силе и происходит по направлению силы:*

$$m \cdot \Delta \vec{v} = (m\vec{g} - k\vec{v}) \cdot \Delta t.$$

Переходя к проекциям сил и приращения скорости на вертикальную ось, получаем  $m \cdot \Delta v_y = -mg \cdot \Delta t - k \cdot v_y \cdot \Delta t$ .

Заметим, что элементарное перемещение мяча по вертикали равно  $\Delta y = v_y \cdot \Delta t$ , и перепишем последнее соотношение в виде:

$$m \cdot \Delta v_y = -mg \cdot \Delta t - k \cdot \Delta y.$$

Просуммируем все приращения вертикальной проекции импульса по всему времени полёта, т. е. от  $t = 0$  до  $t = T$ :

$$m \cdot (\Sigma \Delta v_y) = -mg \cdot (\Sigma \Delta t) - k \cdot (\Sigma \Delta y).$$

Переходя к конечным приращениям, получаем

$$m(v_y(T) - v_y(0)) = -mg(T - 0) - k(y(T) - y(0)).$$

Точки старта и финиша находятся в одной горизонтальной плоскости, поэтому перемещение мяча по вертикали за время полёта нулевое

$$y(T) - y(0) = 0.$$

Тогда  $-(1 - \delta)mv_0 \sin \alpha - mv_0 \sin \alpha = -mgT$ . Отсюда находим продолжительность полёта мяча:

$$T = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} (2 - \delta) = \frac{10 \cdot \sin 60^\circ}{10} (2,0 - 0,3) \approx 1,5 \text{ с.} *$$

В следующем примере рассматривается удар, в ходе которого две очень большие силы, «согласованно» действуют во взаимно перпендикулярных направлениях.

**\* Пример № 4.** Кубик, движущийся поступательно со скоростью  $v$  (рис. 4) по гладкой горизонтальной поверхности, испытывает соударение с шероховатой вертикальной стенкой. Коэффициент трения  $\mu$  скольжения кубика по стенке и угол  $\alpha$  известны. Одна из граней кубика параллельна стенке. Под каким углом  $\beta$  кубик отскочит от стенки?

Считайте, что перпендикулярная стенке составляющая скорости кубика в результате соударения не изменяется по величине.

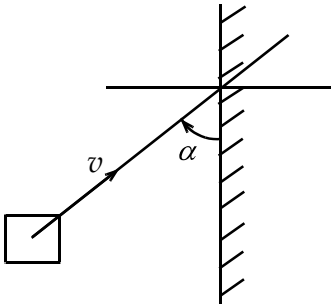


Рис. 4

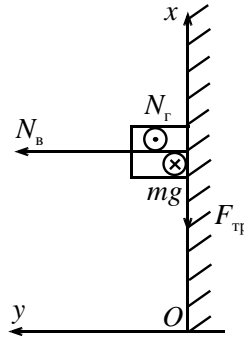


Рис. 5

**Решение.** Силы, действующие на кубик в процессе соударения, показаны на рис. 5. По второму закону Ньютона

$$\Delta \vec{p} = (m \vec{g} + \vec{N}_r + \vec{F}_{\text{тр}} + \vec{N}_b) \cdot \Delta t.$$

Переходя к проекциям на горизонтальные оси  $Ox$  и  $Oy$ , получаем

$$\Delta p_x = -F_{\text{тр}} \Delta t, \quad \Delta p_y = N_b \Delta t.$$

Просуммируем приращения  $\Delta p_y = N_b \Delta t$  по всему времени  $\tau$  соударения, получим:

$$\sum \Delta p_y = p_y(\tau) - p_y(0) = mv \sin \alpha - (-mv \sin \alpha) = \sum_{0 \leq t \leq \tau} N_b \Delta t. \quad \text{В процессе}$$

удара в любой момент времени  $F_{\text{тр}} = \mu N_b$ , следовательно, во столько же раз отличаются импульсы этих сил за время соударения

$$\sum_{0 \leq t \leq \tau} F_{\text{тр}} \Delta t = \mu \sum_{0 \leq t \leq \tau} N_b \Delta t = \mu 2mv \sin \alpha.$$

Тогда легко вычислить проекцию  $v_x(\tau)$  скорости кубика после соударения. Для этого просуммируем приращения

$$\Delta p_x = -F_{\text{тр}} \Delta t = -\mu N_b \Delta t$$

по всему времени  $\tau$  соударения, получим:

$$\sum \Delta p_x = p_x(\tau) - p_x(0) = mv_x(\tau) - mv \cos \alpha =$$

$$= - \sum_{0 \leq t \leq \tau} F_{\text{тр}} \Delta t = - \mu 2mv \sin \alpha.$$

Отсюда  $v_x(\tau) = v(\cos \alpha - 2\mu \sin \alpha)$ . Далее, считая  $v_x(\tau) > 0$ , получаем

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{v_y(\tau)}{v_x(\tau)} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha - 2\mu \sin \alpha}. *$$

### §3. Импульс системы материальных точек.

#### Теорема об изменении импульса системы материальных точек

Рассмотрим систему материальных точек массами  $m_1, m_2, \dots$ , движущихся в произвольной ИСО со скоростями  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots$ . Импульсом  $\vec{P}_c$  системы материальных точек называют векторную сумму импульсов, материальных точек, составляющих систему,  $\vec{P}_c = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots$ .

Найдём скорость  $\frac{\Delta \vec{P}_c}{\Delta t}$  изменения импульса системы материальных точек (ответ на такой вопрос для одной материальной точки нам известен). Для примера рассмотрим систему двух материальных точек. Будем считать, что на первую материальную точку действуют суммарной силой  $\vec{F}_1$  внешние по отношению к системе тела и внутренняя сила  $\vec{f}_{12}$  со стороны второго тела. В свою очередь, на вторую материальную точку действуют внешние по отношению к системе тела, сумма этих сил  $\vec{F}_2$ , и внутренняя сила  $\vec{f}_{21}$  со стороны первого тела. Тогда с учётом второго закона Ньютона для каждого тела получаем

$$\frac{\Delta \vec{P}_c}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{p}_1}{\Delta t} + \frac{\Delta \vec{p}_2}{\Delta t} = (\vec{F}_1 + \vec{f}_{12}) + (\vec{F}_2 + \vec{f}_{21}).$$

По третьему закону Ньютона  $\vec{f}_{12} + \vec{f}_{21} = \vec{0}$ , и мы приходим к теореме об изменении импульса системы материальных точек:

$$\frac{\Delta \vec{P}_c}{\Delta t} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2,$$

*т. е. скорость изменения импульса системы материальных точек равна векторной сумме всех внешних сил, действующих на систему.*

Из приведённого доказательства следует, что третий закон Ньютона можно сформулировать и как требование сохранения импульса системы взаимодействующих тел, если нет никаких других внешних сил. В этом – его более глубокое физическое содержание.

**Пример № 5.** Клин массой  $M$  находится на шероховатой горизонтальной поверхности стола. На клин, положили брусок массой  $m$  и отпустили. Брусок стал соскальзывать, а клин остался в покое. Коэффициент трения скольжения бруска по поверхности клина равен  $\mu$ , наклонная плоскость клина составляет с горизонтом угол  $\alpha$ . Найдите горизонтальную  $R_1$  и вертикальную  $R_2$  силы (рис. 6), с которыми клин действует на опору.

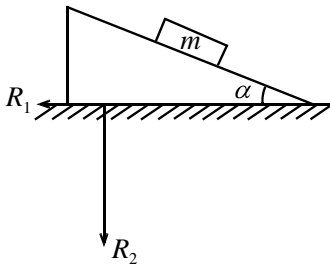


Рис. 6

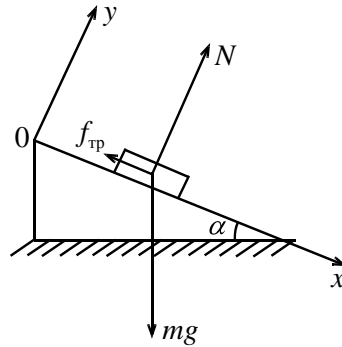


Рис. 7

**Решение.** По третьему закону Ньютона искомые силы связаны с силой трения  $\vec{R}_1 = -\vec{F}_{\text{тр}}$  и силой нормальной реакции  $\vec{R}_2 = -\vec{N}_r$ , действующими на клин со стороны опоры (рис. 7). Силы  $\vec{F}_{\text{тр}}$  и  $\vec{N}_r$ , наряду с силами тяжести, являются внешними по отношению к системе «клин + брусок» и определяют скорость изменения импульса этой системы.

Импульс  $\vec{P}_c$  системы направлен по скорости бруска и по величине равен произведению массы бруска на его скорость  $\vec{P}_c = \vec{p} = m\vec{v}(t)$ . Для определения скорости изменения импульса  $\vec{p}$  бруска обратимся ко второму закону Ньютона (см. рис. 8):

$$\frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = m \vec{g} + \vec{N} + \vec{f}_{\text{тр}}.$$

Переходя к проекциям приращений импульса бруска и сил на оси  $Oy$  и  $Ox$  с учётом соотношения  $f_{\text{тр}} = \mu N$ , получаем:

$$\frac{\Delta p_y}{\Delta t} = 0 = N - mg \cos \alpha,$$

$$\frac{\Delta p_x}{\Delta t} = mg (\sin \alpha - \mu \cos \alpha).$$

По теореме об изменении импульса системы «клин + брусок»

$$\frac{\Delta \vec{P}_c}{\Delta t} = M \vec{g} + m \vec{g} + \vec{N}_r + \vec{F}_{\text{тр}}.$$

Переходя в последнем равенстве к проекциям на горизонтальное и вертикальное направления (рис. 7), с учётом

$$P_{c,\tilde{x}} = p_x \cos \alpha$$

получаем  $P_{c,\tilde{y}} = -p_x \sin \alpha$ ,

$$\frac{\Delta P_{c,\tilde{x}}}{\Delta t} = \frac{\Delta (p_x \cos \alpha)}{\Delta t} = mg (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \cos \alpha = F_{\text{тр}},$$

$$\frac{\Delta P_{c,\tilde{y}}}{\Delta t} = \frac{\Delta (-p_x \sin \alpha)}{\Delta t} = -mg (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \sin \alpha = -(M + m)g + N_r.$$

Отсюда находим искомые силы

$$R_1 = F_{\text{тр}} = mg (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \cos \alpha,$$

$$R_2 = N_r = (M + m)g - mg (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \sin \alpha.$$

К этим же результатам можно прийти, анализируя движение на «традиционном языке» сил и ускорений с использованием формулы (2).

#### §4. Сохранение импульса системы материальных точек

Из теоремы об изменении импульса системы материальных точек

$$\frac{\Delta \vec{P}_c}{\Delta t} = \sum_i \vec{F}_i$$

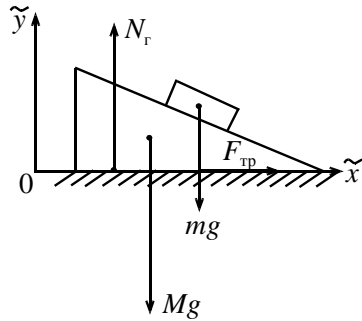


Рис. 8

следует сохранение импульса или его проекций в следующих случаях:

если  $\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$ , то  $\vec{P}_c$  остаётся неизменным по величине и направлению;

если существует направление  $x$  такое, что  $\sum_i F_{i,x} = 0$ , то

$$P_{c,x} = const;$$

наконец, если на малом интервале времени внешние силы конечные и импульс этих сил за время действия во много раз меньше по величине

импульса системы  $\left| \sum_i \vec{F}_i \right| \Delta t \ll \left| \vec{P}_c(t) \right|$ , то из равенства

$$\Delta \vec{P}_c = \vec{P}_c(t + \Delta t) - \vec{P}_c(t) = \left( \sum_i \vec{F}_i \right) \Delta t$$

следует, что приращение  $\Delta \vec{P}_c$  импульса системы мало, т. е. на рассматриваемом интервале времени сохраняется импульс системы

$$\vec{P}_c(t + \Delta t) = \vec{P}_c(t).$$

**Пример № 6.** Артиллерист стреляет ядром массы  $m$  так, чтобы оно упало в неприятельском лагере. На вылетающее из пушки ядро очень быстро садится барон Мюнхгаузен, масса которого  $5m$ . Какую часть пути до неприятельского лагеря ему придётся идти пешком?

**Решение.** Вы, конечно, догадались, что эта задача иллюстрирует последний из перечисленных случаев сохранения импульса системы. В процессе «посадки» барона на ядро на систему «ядро + барон» действуют внешние силы – это силы тяжести и силы сопротивления воздуха. Но барон столь ловок и устраивается на ядро столь быстро, что импульс этих конечных сил за время «посадки» барона на ядро значительно меньше по величине импульса  $m\vec{v}_0$  ядра непосредственно перед «посадкой». Тогда скорость  $\vec{v}_0$  ядра за мгновение до встречи со скалочным персонажем и скорость  $\vec{v}_1$  системы «барон на ядре» связаны законом сохранения импульса системы

$$m\vec{v}_0 = 6m\vec{v}_1,$$

так что скорость ядра сразу после того, как Мюнхгаузен устроится на нём поудобнее, уменьшится в 6 раз. Следовательно, в такое же число раз уменьшатся: длительность полёта (равная удвоенному частному от деления начальной вертикальной составляющей скорости на величину ускорения свободного падения) и горизонтальная составляющая скорости. Дальность полёта, равная произведению этих величин, уменьшится в 36 раз, тогда оставшиеся после благополучного приземления  $\frac{35}{36}$  расстояния до неприятельского лагеря, барону предстоит пройти пешком!

**Пример № 7.** На гладкой горизонтальной поверхности лежит соломинка массой  $M$  и длиной  $L$ . Жук массой  $m$  перемещается по соломинке с одного конца на другой. На какое расстояние  $S$  переместится соломинка?

**Решение.** Рассмотрим систему тел «жук + соломинка». На каждом элементарном промежутке времени приращение  $\Delta\vec{P}_c$  импульса этой системы равно суммарному импульсу действующих на систему внешних сил: т. е. сил тяжести и силы нормальной реакции

$$\Delta\vec{P}_c = M \Delta\vec{v}_1 + m\Delta\vec{v}_2 = ((M + m)\vec{g} + \vec{N})\Delta t,$$

здесь  $\vec{v}_1$  – скорость соломинки,  $\vec{v}_2$  – скорость жука. Обе скорости определены в лабораторной системе отсчёта. Сумма сил тяжести и нормальной реакции равна нулю. Тогда импульс системы «жук + соломинка» в процессе движения остаётся постоянным, равным своему начальному значению,  $M\vec{v}_1 + m\vec{v}_2 = \vec{0}$ .

Поскольку задано перемещение жука в системе отсчёта, связанной с соломинкой, обратимся к правилу сложения скоростей

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{u},$$

здесь  $\vec{u}$  – скорость жука относительно соломинки. Перейдём в этом равенстве к проекциям на горизонтальную ось, получим

$$v_{2,x} = v_{1,x} + u_x.$$

С учётом правила сложения скоростей закон сохранения импульса принимает вид  $M v_{1,x} + m(v_{1,x} + u_x) = 0$ , т. е. в любой момент времени

$v_{1,x} = -\frac{m}{M+m}u_{x'}$ . Тогда элементарные перемещения:  $\Delta x_1 = v_{1,x}\Delta t$  – соломинки относительно лабораторной системы отсчёта и  $\Delta x' = u_{x'}\Delta t$  – жука относительно соломинки, связаны соотношением

$$\Delta x_1 = -\frac{m}{M+m}\Delta x'.$$

Суммируя элементарные перемещения по всему времени движения и переходя к абсолютным величинам, приходим к ответу на вопрос задачи:

$$S = \frac{m}{m+M}L.$$

**Пример № 8.** Клин массой  $2m$  и углом наклона к горизонту  $\alpha$  ( $\cos\alpha = 2/3$ )

находится на гладкой горизонтальной поверхности стола (см. рис. 9).

Через блок, укреплённый на вершине клина, перекинута лёгкая нить, связывающая грузы, массы которых равны  $t$  и  $3t$ . Груз массой  $3t$  может скользить вдоль вертикальной направляющей  $AB$ , закреплённой на клине. Этот груз удерживают неподвижно на расстоянии  $H = 27$  см от стола, а затем отпускают. В результате грузы и клин движутся поступательно. На какое расстояние  $S$  сместится клин к моменту удара груза массой  $3t$  о стол? Массы блока и направляющей  $AB$  считайте пренебрежимо малыми.

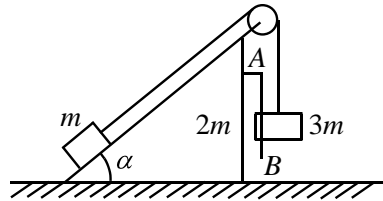


Рис. 9

Этот груз удерживают неподвижно на расстоянии  $H = 27$  см от стола, а затем отпускают. В результате грузы и клин движутся поступательно. На какое расстояние  $S$  сместится клин к моменту удара груза массой  $3t$  о стол? Массы блока и направляющей  $AB$  считайте пренебрежимо малыми.

**Решение.** Рассмотрим систему тел «клин + грузы» (рис. 10). На каждом элементарном промежутке времени приращение  $\Delta\vec{P}_c$  импульса системы равно суммарному импульсу действующих на систем внешних сил (рис. 10): тяжести и нормальной реакции горизонтальной опоры

$\Delta\vec{P}_c = (6m\vec{g} + \vec{N})\Delta t$ . Проекция сил тяжести и нормальной реакции на

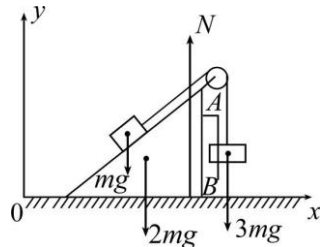


Рис. 10



горизонтальную ось нулевые. Следовательно, в процессе движения горизонтальная составляющая импульса системы «клин + грузы» остаётся постоянной, равной своему начальному значению – нулю:

$$(2m + 3m)v_{x,к} + mv_{x,г} = 0,$$

здесь  $v_{x,к}$  – проекция скорости клина и груза массой  $3m$  на горизонтальную ось,  $v_{x,г}$  – проекция скорости груза массой  $m$  на эту же ось.

В системе отсчёта, связанной с клином, модули любых элементарных перемещений грузов равны вследствие нерастяжимости нити. Следовательно, в этой системе модуль перемещения лёгкого груза в проекции на горизонтальную ось за время движения равен  $H \cos \alpha$ . Тогда воспользуемся результатами предыдущей задачи. По правилу сложения скоростей  $\vec{v}_г = \vec{v}_к + \vec{u}$ , здесь  $\vec{u}$  – скорость лёгкого груза в системе отсчёта, связанной с клином. С учётом этого соотношения закон сохранения импульса принимает вид

$$(2m + 3m)v_{x,к} + m(v_{x,к} + u_{x'}) = 0.$$

Отсюда находим связь проекций скорости

$$v_{x,к} = -\frac{m}{6m} u_{x'} = -\frac{u_{x'}}{6}$$

и элементарных перемещений:

$$\Delta x_к = -\frac{\Delta x'}{6},$$

где  $\Delta x_к$  – перемещение клина относительно лабораторной системы,  $\Delta x'$  – проекция перемещения лёгкого груза на горизонтальную ось в системе отсчета, связанной с клином. Суммируя элементарные перемещения по всему времени движения и переходя к абсолютным величинам, приходим к ответу на вопрос задачи:

$$S = \frac{H \cos \alpha}{6} = \frac{27 \cdot 2}{6 \cdot 3} = 3 \text{ см.}$$

Рассмотренные примеры подчёркивают важную роль законов сохранения. Решение прямой задачи динамики, т. е. определение траектории

по заданным силам и начальным условиям, упрощается в тех случаях, когда удаётся заменить уравнения Ньютона другими, эквивалентными им, но не содержащими ускорений. Эти уравнения, являющиеся математическим следствием уравнений Ньютона и связывающие скорости (импульсы) точек с их координатами, называют законами сохранения. Проиллюстрируем это на примере задач о столкновениях частиц.

### **§5. Задачи на столкновения и законы сохранения импульса и энергии**

В физике под столкновениями понимают процессы взаимодействия между телами (частицами) в широком смысле слова, а не только в буквальном – как соприкосновение тел. Сталкивающиеся тела на большом расстоянии являются свободными. Проходя друг мимо друга, тела взаимодействуют между собой, в результате могут происходить различные процессы – тела могут соединиться в одно тело (*абсолютно неупругий удар*), могут возникать новые тела и, наконец, может иметь место *упругое столкновение*, при котором тела после некоторого сближения вновь расходятся без изменения своего внутреннего состояния. Столкновения, сопровождающиеся изменением внутреннего состояния тел, называются *неупругими*. Тела (частицы), участвующие в столкновении, характеризуются (до и после столкновения) импульсами, энергиями. Процесс столкновения сводится к изменению этих величин в результате взаимодействия. Законы сохранения энергии и импульса позволяют достаточно просто устанавливать соотношения между различными физическими величинами при столкновении тел. Особенно ценным здесь является то обстоятельство, что зачастую законы сохранения могут быть использованы даже в тех случаях, когда действующие силы неизвестны. Так обстоит дело, например, в физике элементарных частиц.

Происходящие в обычных условиях столкновения макроскопических тел почти всегда бывают в той или иной степени неупругими – уже хотя бы потому, что они сопровождаются некоторым нагреванием тел, т. е. переходом части их кинетической энергии в тепло. Тем не менее, в физике понятие об упругих столкновениях играет важную роль – с такими столкновениями часто приходится иметь дело в физическом эксперименте в области атомных явлений, да и обычные столкновения можно часто с достаточной степенью точности считать упругими.

Сохранение импульса тел (частиц) при столкновении обусловлено тем, что совокупность тел, участвующих в столкновении, составляет либо изолированную систему, т. е. на тела, входящие в систему, не действуют внешние силы, либо замкнутую: внешние силы отличны от нуля, а сумма внешних сил равна нулю. Несколько сложнее обстоит дело с применением закона сохранения энергии при столкновениях. Обращение к сохранению энергии требует порой учёта различных форм внутренней энергии.

Можно сказать, что действие законов сохранения импульса и энергии в процессах столкновения подтверждено широким спектром опытных данных.

Переходя к характерным примерам, отметим, что исследование столкновений традиционно проводится как в лабораторной системе отсчёта (ЛСО), т. е. в инерциальной системе отсчёта, связанной с лабораторией, где проводится опыт, так и в системе центра масс, с которой Вы познакомитесь в следующих Заданиях. Напомним также, что центральным ударом шаров (шайб), называют удар, при котором скорости шаров (шайб) направлены вдоль прямой, проходящей через их центры.

### Неупругие столкновения

**Пример № 9.** Частица массой  $m$  с кинетической энергией  $K$  сталкивается с неподвижной частицей массой  $M$ . Найдите приращение  $Q$  внутренней энергии системы частиц в результате абсолютно неупругого столкновения («слипания»).

**Решение.** Рассмотрим абсолютно неупругий удар двух тел в ЛСО. Налетающая частица движется до столкновения в положительном направлении оси  $Ox$  со скоростью  $\vec{v}$ , кинетическая энергия частицы

$K = \frac{mv^2}{2}$ . В результате абсолютно неупругого удара (слипания) час-

тицы движутся с одинаковой скоростью  $\vec{u}$ . По закону сохранения импульса

$$mv = (m + M)u,$$

По закону сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{(m+M)u^2}{2} + Q.$$

Из приведённых соотношений находим

$$Q = \frac{M}{m+M} K.$$

Отметим, что в предельных случаях

$$Q = K, \quad m \ll M,$$

$$Q = \frac{M}{m} K \ll K, \quad m \gg M.$$

Как видим, при неупругом столкновении лёгкой частицы с массивной (например, электрона с атомом) происходит почти полный переход её кинетической энергии во внутреннюю энергию массивной частицы.

При равенстве масс ( $m = M$ )

$$Q = \frac{K}{2}.$$

Отсюда следует, например, что при столкновении двух одинаковых автомобилей, один из которых неподвижен, а другой движется по направлению к нему, половина кинетической энергии идёт на разрушение.

### Упругие столкновения

**Пример № 10.** На гладкой горизонтальной поверхности лежит гладкий шар массой  $M$ . На него налетает гладкий шар того же радиуса массой  $m$ , движущийся со скоростью  $\vec{v}$ . Происходит упругий центральный удар шаров. Найдите скорости  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$  шаров после соударения. При каком условии налетающий шар будет двигаться после соударения в прежнем направлении?

**Решение.** Задачу рассмотрим в ЛСО, ось  $Ox$  которой направим по линии центров шаров в момент соударения. Внешние силы, действующие на шары в процессе соударения, это силы тяжести и силы нормальной реакции опоры. Их сумма равна нулю. Следовательно, импульс системы шаров в процессе взаимодействия не изменяется. По закону сохранения импульса

$$m\vec{v} = m\vec{v}_1 + M\vec{v}_2.$$

Переходя к проекциям на ось  $Ox$ , получаем

$$mv = mv_{1x} + Mv_2,$$

здесь учтено, что направление скорости  $\vec{v}_1$  налетающего шара после соударения неизвестно. По закону сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_{1x}^2}{2} + \frac{Mv_2^2}{2}.$$

Полученные соотношения перепишем в виде

$$m(v - v_{1x}) = Mv_2,$$

$$m(v^2 - v_{1x}^2) = Mv_2^2.$$

Разделив второе равенство на первое ( $v \neq v_{1x}$ ), приходим к линейной системе

$$v_2 = v - v_{1x},$$

$$m(v - v_{1x}) = Mv_2,$$

решение которой имеет вид

$$v_{1x} = \frac{m - M}{m + M}v,$$

$$v_2 = \frac{2m}{m + M}v.$$

Налетающий шар будет двигаться после соударения в прежнем направлении ( $v_{1x} > 0$ ) при  $m > M$ , т. е. если масса налетающего шара больше массы покоящегося шара.

**\* Пример № 11.** Две гладкие упругие круглые шайбы движутся поступательно по гладкой горизонтальной поверхности. Скорости  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$  шайб непосредственно перед соударением известны и показаны на рис. 11. Найдите скорости  $\vec{v}'_1$  и  $\vec{v}'_2$  шайб после абсолютно упругого нецентрального соударения. Массы шайб  $m_1$  и  $m_2$ .

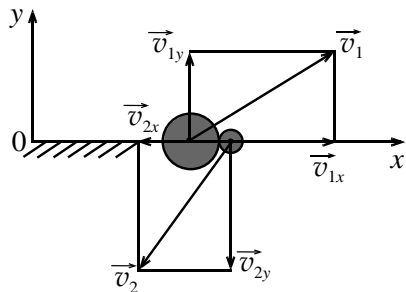


Рис. 11

**Решение.** Задачу рассмотрим в ИСО, оси координат  $Ox$  и  $Oy$  которой лежат в горизонтальной плоскости, при этом ось  $Ox$  направлена по линии центров шайб в момент соударения (рис. 11). В течение времени соударения на систему шайб действуют только вертикальные внешние силы: это силы тяжести и силы нормальной реакции. Их сумма равна нулю. Тогда импульс системы шайб в процессе взаимодействия сохраняется:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2,$$

здесь  $\vec{p}_1 = m_1 \vec{v}_1$ ,  $\vec{p}_2 = m_2 \vec{v}_2$ ,  $\vec{p}'_1 = m_1 \vec{v}'_1$ ,  $\vec{p}'_2 = m_2 \vec{v}'_2$  – импульсы шайб до и после соударения.

Так как шайбы идеально гладкие, то в процессе соударения внутренние силы – силы упругого взаимодействия – направлены только по оси  $Ox$ . Эти силы не изменяют  $y$  – составляющие импульсов шайб. Тогда из  $p_{1y} = p'_{1y}$ ,  $p_{2y} = p'_{2y}$  находим  $y$  – составляющие скоростей шайб после соударения

$$v'_{1y} = v_{1y}, \quad v'_{2y} = v_{2y},$$

т. е. в проекции на ось  $Oy$  скорости шайб в результате соударения не изменились.

Найдём  $x$  – составляющие скоростей шайб после упругого соударения. При таком соударении сохраняется кинетическая энергия

$$\frac{m_1 (v_{1x}^2 + v_{1y}^2)}{2} + \frac{m_2 (v_{2x}^2 + v_{2y}^2)}{2} = \frac{m_1 ((v'_{1x})^2 + (v'_{1y})^2)}{2} + \frac{m_2 ((v'_{2x})^2 + (v'_{2y})^2)}{2}.$$

С учётом равенства  $y$  – составляющих скоростей шайб до и после соударения последнее равенство принимает вид:

$$\frac{m_1 v_{1x}^2}{2} + \frac{m_2 v_{2x}^2}{2} = \frac{m_1 (v'_{1x})^2}{2} + \frac{m_2 (v'_{2x})^2}{2}.$$

Обратимся к закону сохранения импульса и перейдём к проекциям импульсов шайб на ось  $Ox$ :

$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = m_1 v'_{1x} + m_2 v'_{2x}.$$

Таким образом, исходная задача сведена к задаче об абсолютно упругом центральном ударе: именно такой вид приняли бы законы сохранения энергии и импульса, если бы скорости шайб были направлены по

линии центров. Полученную нелинейную систему уравнений можно свести к линейной. Для этого следует (как и в предыдущей задаче) в обоих уравнениях по одну сторону знака равенства объединить слагаемые, относящиеся к первой шайбе, а по другую – ко второй, и разделить ( $v_{1x} \neq v'_{1x}$ ) полученные соотношения. Это приводит к линейному уравнению

$$v_{1x} + v'_{1x} = v_{2x} + v'_{2x}.$$

Решая систему из двух последних уравнений, находим

$$v'_{1x} = \frac{(m_1 - m_2)v_{1x} + 2m_2v_{2x}}{m_1 + m_2},$$

$$v'_{2x} = \frac{2m_1v_{1x} + (m_2 - m_1)v_{2x}}{m_1 + m_2}.$$

Полученные соотношения для  $v'_{1x}, v'_{1y}$  и  $v'_{2x}, v'_{2y}$  решают вопрос о проекциях и величинах скоростей шайб после соударения

$$v'_1 = \sqrt{(v'_{1x})^2 + (v'_{1y})^2}, \quad v'_2 = \sqrt{(v'_{2x})^2 + (v'_{2y})^2},$$

а также об углах  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , которые векторы скорости  $\vec{v}'_1$  и  $\vec{v}'_2$  образуют с положительным направлением оси  $Ox$ ,

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{v'_{1y}}{v'_{1x}}, \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{v'_{2y}}{v'_{2x}}.$$

Построенное в общем виде решение задач упругого центрального и нецентрального соударений открывает дорогу к анализу целого ряда задач, для которых рассмотренная модель соответствует характеру взаимодействия тел (частиц). Приведём пример.

**Пример № 12.** Гладкая круглая шайба массы  $m_1$  движется со скоростью  $\vec{v}$  вдоль хорды, расстояние до которой от центра гладкого тонкого однородного обруча равно  $R/2$  (рис. 12). Обруч массы  $m_2$  и радиуса  $R$  лежит на гладком горизонтальном столе. Через какое время  $\tau$  после первого удара шайба окажется на минимальном расстоянии от центра движущегося обруча? Каково это расстояние? Удар считайте абсолютно упругим.

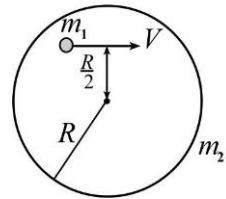


Рис. 12

**Решение.** Воспользуемся результатами, полученными в предыдущем примере. В ЛСО, ось  $Ox$  которой направлена по линии центров шайбы и обруча в момент соударения, проекции скорости шайбы и центра обруча на ось  $Ox$  после соударения равны соответственно

$$v'_{1x} = \frac{(m_1 - m_2)v_{1x} + 2m_2v_{2x}}{m_1 + m_2} = \frac{(m_1 - m_2)v_{1x}}{m_1 + m_2},$$

$$v'_{2x} = \frac{2m_1v_{1x} + (m_2 - m_1)v_{2x}}{m_1 + m_2} = \frac{2m_1v_{1x}}{m_1 + m_2},$$

здесь  $v_{1x} = v \cos \frac{\pi}{6}$  – проекция скорости шайбы на ось  $Ox$  до соударения,  $v_{2x} = 0$  – обруч до соударения покоился.

Из этих соотношений следует, что в системе отсчёта, связанной с обручем, проекция скорости шайбы на линию центров после соударения

$$v_{1x\text{отн}} = v'_{1x} - v'_{2x} = -v_{1x} = -v \cos \frac{\pi}{6}$$

просто изменила знак, а перпендикулярная линии центров составляющая, как было показано, в рассматриваемом соударении не изменяется. Следовательно, в системе, связанной с обручем, шайба отразится по закону «угол падения равен углу отражения» и минимальное расстояние от шайбы до центра обруча снова будет равно  $R/2$ . Искомое время

$$\tau = \frac{R \cos^2 \frac{\pi}{6}}{|v_{1x\text{отн}}|} = \cos \frac{\pi}{6} \frac{R}{v} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{R}{v}. *$$

### Контрольные вопросы

1. Какие системы отсчёта называют инерциальными? Пассажир автобуса видит, что пешеходы, стоящие на автобусной остановке, ускоренно удаляются. Будет ли инерциальной система отсчёта, связанная с автобусом? Ответ обоснуйте.

2. Приведите определения: импульса материальной точки, приращения импульса материальной точки за время от  $t$  до  $t + \Delta t$  и импульса силы, действующей на рассматриваемую точку, за время от  $t$  до  $t + \Delta t$ .



Как связаны в ИСО приращение импульса материальной точки и импульс силы?

**3.** Сформулируйте теорему об изменении импульса материальной точки.

*Упражнение.* Материальная точка массой  $m = 2$  кг движется в однородном силовом поле  $\vec{F}$ ,  $F = 0,5$  Н. В момент времени  $t = 0$  её скорость по величине равна  $v_0 = 1$  м/с и составляет угол  $\alpha = 120^\circ$  с направлением силы  $\vec{F}$ . Через какое время  $\tau$  импульс материальной точки будет равен по модулю начальному?

**4.** Приведите определение импульса системы материальных точек.

**5.** В каких случаях сохраняется импульс системы материальных точек, в том числе и при наличии внешних сил?

**6\***. Допустим, что в изолированной системе, состоящей из двух материальных точек, внутренние силы не удовлетворяют третьему закону Ньютона, т. е.  $\vec{f}_{12} \neq -\vec{f}_{21}$ . Будет ли сохраняться импульс такой системы? Ответ поясните.

**7.** Сформулируйте теорему об изменении импульса системы материальных точек.

*Упражнение.* Снаряд, выпущенный вертикально вверх, мгновенно разрывается в высшей точке траектории на два осколка, массы которых  $m = 10$  кг и  $2m$ . Скорость лёгкого осколка сразу после взрыва  $v_1 = 1000$  м/с. Найдите скорость  $v_2$  второго осколка сразу после взрыва. Найдите суммарный импульс  $\vec{P}_c$  всех осколков через  $t_1 = 5$  с после взрыва. В этот момент все осколки находятся в полёте. Силы сопротивления воздуха, действующие на снаряд и осколки, считайте пренебрежимо малыми.

**8.** Какие соударения называют неупругими?

*Упражнение.* Два куска пластилина массами  $m_1$  и  $m_2$ , летящие со скоростями  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$ , слипаются. Найдите наибольшее количество  $Q$  теплоты, которое может выделиться в результате абсолютно неупругого соударения.

**9.** Какие соударения называют упругими?

*Упражнение.* Два идеально упругих шарика, массы которых  $m_1$  и  $m_2$ , движутся вдоль одной и той же прямой со скоростями

$\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$ ,  $\vec{v}_2 \uparrow \downarrow \vec{v}_1$ . Происходит упругое центральное соударение. Во время соударения шарики начинают деформироваться, и часть кинетической энергии переходит в потенциальную энергию деформации. Затем деформация уменьшается, и запасённая потенциальная энергия вновь переходит в кинетическую. Найдите потенциальную энергию  $\Pi$  деформации в момент, когда она наибольшая.

### Задачи

1. Две частицы массами  $m$  и  $2m$  движутся во взаимно перпендикулярных направлениях со скоростями, по величине равными соответственно  $v$  и  $2 \cdot v$ . С этого момента времени на каждую частицу действуют одинаковые по величине и направлению силы. После прекращения действия силы легкая частица движется со скоростью  $3 \cdot v$  в направлении, обратном первоначальному. Определите величину  $v_2$  скорости второй частицы после прекращения действия силы.

2. Ледокол, ударяясь о льдину массой  $m$ , отбрасывает её, сообщив ей скорость  $v$ . Предположим, что сила, с которой ледокол, действует на льдину, нарастает со временем по линейному закону при сближении ледокола со льдиной и также равномерно по времени убывает, когда они расходятся. Найдите максимальную силу  $N_{\max}$ , с которой льдина действует на корпус ледокола в процессе столкновения продолжительностью  $\tau$ .

3. С палубы яхты, бороздящей океан со скоростью  $v_0 = 5$  м/с, принцесса роняет в воду жемчужину массой  $m = 1$  г. Найдите максимальное горизонтальное перемещение  $L_{\max}$  жемчужины к моменту, когда она достигнет дна, если при движении в воде на жемчужину действует сила  $\vec{F}$  сопротивления, пропорциональная её скорости  $\vec{F} = -k\vec{v}$ ,  $k = 0,1$  кг/с.

4. Мешок с песком сползает с нулевой начальной скоростью с некоторой высоты по гладкой доске, наклонённой под углом  $\alpha = 60^\circ$  к горизонту. После спуска мешок попадает на горизонтальный пол. Мешок после удара не подскакивает. Коэффициент трения скольжения мешка по полу  $\mu = 0,7$ . Где остановится мешок?

5. Санки, находящиеся на горизонтальной поверхности, тянут, действуя силой, направленной под углом  $\alpha$  к горизонту. В другом случае такая же по величине сила, приложенная к санкам, направлена горизонтально. Оказалось, что в обоих случаях санки разгоняются из состояния

покоя до одной и той же скорости за одинаковое время. Найдите коэффициент  $\mu$  трения скольжения санок по поверхности.

6. Обратимся к задаче, рассмотренной в **Примере № 7**, и будем считать, что на одном конце соломинки находятся два жука. Масса каждого жука равна  $m$ , масса соломинки  $M$ . Найдите скорость соломинки после того, как оба жука, пробежав по соломинке, спрыгнут с другого конца с относительной скоростью  $u$ : а) одновременно, б) поочерёдно (при этом второй жук начинает движение после того, как спрыгнет первый). В каком случае скорость соломинки будет больше?

7. Шайба, движущаяся по гладкой горизонтальной поверхности со скоростью  $v$ , налетает на покоящийся брусок. В результате неупругого удара шайба останавливается, а брусок движется поступательно со скоростью  $v/3$ . Какая доля  $\delta$  начальной кинетической энергии шайбы переходит в теплоту?

8. На железнодорожной тележке массой  $M$  жёстко закреплён вертикальный щит, повернутый на угол  $\alpha$  от перпендикулярного рельсам положения (см. рис. 13). В щит бросают мешок с песком массой  $m$ , горизонтальная составляющая начальной скорости которого равна  $v_0$  и параллельна рельсам. Найдите скорость  $v$  тележки после того, как мешок, ударившись о щит, сполз по нему вниз и упал на тележку. Трением мешка о щит и сопротивлением движению тележки можно пренебречь. До удара тележка была неподвижна.

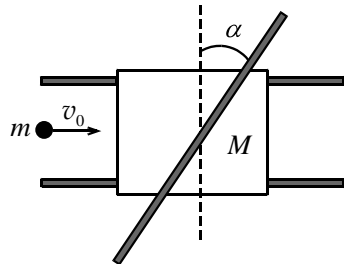


Рис. 13

9. Шайба, движущаяся по гладкой горизонтальной поверхности, сталкивается абсолютно упруго с такой же, но покоящейся шайбой и отклоняется на угол  $\alpha$  от первоначального направления движения. Найдите кинетическую энергию  $K_2$  второй шайбы после соударения, если кинетическая энергии первой перед соударением равна  $K_0$ .

10. Два гладких упругих шара радиуса  $R$  каждый движутся поступательно навстречу друг другу по параллельным прямым, расстояние между которыми равно  $R$ . Массы шаров  $m_1 = 1$  кг и  $m_2 = 2$  кг, их скорости соответственно  $v_1 = 2$  м/с и  $v_2 = 1$  м/с. Для любого ( $i = 1$  или  $i = 2$ , на Ваш выбор) шара определите величину  $|\Delta \vec{v}_i|$

приращения скорости, приращение  $\Delta v_i$  величины скорости и угол  $\theta_i$ , на который повернётся вектор скорости шара в результате соударения.

### Дополнительные задачи

1. Решите **Задачу № 8**, приняв в условии, что мешок, ударившись о щит, сполз по нему вниз и упал с тележки.

2. Решите задачу, рассмотренную в **Примере № 8 Задания**, считая, что направляющая  $AB$  образует угол  $\beta = 30^\circ$  с вертикалью.