Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение дополнительного образования детей
«Заочная физико-техническая школа
Московского физико-технического института
(государственного университета)»

МАТЕМАТИКА

Алгебраические уравнения, неравенства, системы уравнений и неравенств

Задание №1 для 11-х классов

(2013 – 2014 учебный год)

г. Долгопрудный, 2013

Составитель: С.И. Колесникова, старший преподаватель кафедры высшей математики МФТИ.

Математика: задание №1 для 11-х классов (2012 – 2013 учебный год), 2013, 32 с.

Дата отправления заданий по физике и математике – 28 сентября 2013 г.

Составитель:
Колесникова София Ильинична
Подписано 10.06.13. Формат 60×90 1/16.
Бумага типографская. Печать офсетная. Усл. печ. л. 2,00.
Уч.-изд. л. 1,77. Тираж 1200. Заказ №2-а.

Заочная физико-техническая школа
Московского физико-технического института
(государственного университета)
ООО «Печатный салон ШАНС»

Институтский пер., 9, г. Долгопрудный, Москов. обл., 141700.
ЗФТШ, тел./факс (495) 408-5145 – **заочное отделение,**
тел./факс (498) 744-6351 – **очно-заочное отделение,**
тел. (499) 755-5580 – **очное отделение.**

e-mail: zftsh@mail.mipt.ru

Наш сайт: www.school.mipt.ru

Цель нашего задания – вспомнить основные правила и приемы решения алгебраических неравенств и систем уравнений. Многие из них вам хорошо известны, некоторые покажутся новыми и, с первого взгляда, даже лишними, но не спешите их отбросить сразу – решите известную вам задачу разными способами и выберите сами тот способ, который вам больше нравится.

§1. Равносильность уравнений и неравенств

В нашем задании большую роль будет играть понятие равносильности.

Два неравенства

$$f_1(x) > g_1(x) \quad \text{и} \quad f_2(x) > g_2(x) \tag{1}$$

или два уравнения

$$f_1(x) = g_1(x) \quad \text{и} \quad f_2(x) = g_2(x) \tag{2}$$

называются равносильными на множестве X, если каждое решение первого неравенства (уравнения), принадлежащее множеству X, является решением второго и, наоборот, каждое решение второго, принадлежащее X, является решением первого, или, если, ни одно из неравенств (уравнений) на X не имеет решений. Т. е. два неравенства (уравнения) равносильны, по определению, если множества решений этих неравенств (уравнений) на X совпадают.

Отсюда следует, что вместо того, чтобы решать данное неравенство (уравнение), можно решать любое другое, равносильное данному. Замену одного неравенства (уравнения) другим, равносильным данному на X, называют равносильным переходом на X. Равносильный переход обозначают двойной стрелкой $\Leftrightarrow$. Если уравнение $f(x)=0$ (или неравенство $f(x)>0$) равносильно уравнению $g(x)=0$ (или неравенству $g(x)>0$), то это мы будем обозначать так:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow g(x)=0 \text{ (или } f(x)>0 \Leftrightarrow g(x)>0\text{)}.$$

Пример 1. $\sqrt{x^2-4}=1-x^2 \Leftrightarrow \sqrt{\sin^2 x-2}=0$, т. к. ни то, ни другое не имеет решения.

Важно понимать, что для доказательства неравносильности двух неравенств (уравнений) нет необходимости решать каждое из неравенств (уравнений), а затем убеждаться в том, что множества их решений не совпадают – достаточно указать одно решение одного из неравенств (уравнений), которое не является решением другого неравенства (уравнения).

Пример 2. При каких значениях параметра a системы

$$\begin{cases} ax+3y=6a-4, \\ x+y=2a \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x^2-2y^4-6x+8=0, \\ x^2+y^2-(2a+4)x+2\left(a^2+a+2\right)=0 \end{cases}$$

равносильны?

♦ Решим сначала первую, более простую систему

$$\begin{cases} ax+3y=6a-4, \\ x+y=2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2a-x, \\ ax+3(2a-x)=6a-4 \Leftrightarrow x(a-3)=-4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a\neq 3, \\ x=-\dfrac{4}{a-3}, \\ y=2a+\dfrac{4}{a-3}=\dfrac{2a^2-6a+4}{a-3}; \end{cases} \\ \begin{cases} a=3, \\ 0\cdot x=-4 \Leftrightarrow \varnothing. \end{cases} \end{array} \right.$$

Подставим $a=3$ во вторую систему

$$a=3: \begin{cases} x^2-2y^4-6x+8=0, \\ x^2+y^2-10x+28=0 \Leftrightarrow (x-5)^2+y^2+3=0 \Leftrightarrow \varnothing, \end{cases} \Rightarrow$$

При $a=3$ системы **равносильны**, т. к. при этом значении параметра обе системы не имеют решений.

При $a\neq 3$ первая система имеет единственное решение. Заметим, что во второй системе y входит только в четной степени, значит, если решением является пара (x_0, y_0), то пара $(x_0, -y_0)$ тоже будет решением. При этом если $y_0\neq -y_0 \Leftrightarrow y_0\neq 0$, то решений будет два. Следовательно, единственным решением **может быть** только пара $(x_0, 0)$. Посмотрим, при каких a такое решение у системы есть. Подставим эту пару в систему

$$\begin{cases} x_0^2-6x_0+8=0 \Leftrightarrow x_0=3\pm 1, \\ x_0^2-(2a+4)x_0+2\left(a^2+a+2\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_0=2, \\ a^2-a=0 \Leftrightarrow a=\left[\begin{array}{l} 0, \\ 1; \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} x_0=4, \\ a^2-3a+2=0 \Leftrightarrow a=\left[\begin{array}{l} 2, \\ 1. \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right.$$

Итак, таких a три: $0, 1, 2.$ Но при этих a вторая система может иметь и другие решения, а если у неё других решений нет, то её единственное решение может не совпадать с решением первой системы, и тогда такое a не удовлетворяет условию задачи. Проверим эти значения параметра.

1. $a=0$: Первая система имеет решение: $x=\frac{4}{3}$ и $y=-\frac{4}{3}\neq 0$. Следовательно, системы не равносильны, т. к. решения систем не совпадают (у второй $y=0$).

2. $a=1$: Вторая система имеет вид

$$\begin{cases} x^2-2y^4-6x+8=0, \\ x^2+y^2-6x+8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0, \\ x=3\pm 1=4; 2. \end{cases}$$

Следовательно, системы не равносильны, т. к. вторая имеет два решения.

3. $a=2$: $\begin{cases} ax+3y=6a-4, \\ x+y=2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4, \\ y=0 \end{cases}$

и $\begin{cases} x^2-2y^4-6x+8=0, \\ x^2+y^2-(2a+4)x+2\left(a^2+a+2\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2y^4-6x+8=0, \\ (x-4)^2+y^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=4, \\ y=0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4, \\ y=0. \end{cases}$$

Следовательно, системы при этом значении a *равносильны* – они имеют единственное решение $(4;0)$.

Ответ: $2; 3.$ ♦

При решении неравенств и уравнений часто используются следующие равносильные переходы.

1. Если функции $f(x), g(x), h(x)$ определены на множестве X, то на этом множестве

а) $f(x)<g(x) \Leftrightarrow f(x)+h(x)<g(x)+h(x).$ (УР 1)

б) $f(x)=g(x) \Leftrightarrow f(x)+h(x)=g(x)+h(x).$ (УР 2)

2. Если $h(x)>0$ на X, то на X

$$f(x)<g(x) \Leftrightarrow f(x)h(x)<g(x)h(x), \qquad \text{(УР 3)}$$

т. е. умножение неравенства на **положительную** функцию приводит к равносильному неравенству с тем же знаком.

3. Если $h(x)<0$ на X, то на X

$$f(x)<g(x) \Leftrightarrow f(x)h(x)>g(x)h(x), \qquad \text{(УР 4)}$$

т. е. при умножении неравенства на **отрицательную** функцию знак неравенства ***меняется*** на противоположный.

4. Если $h(x)\neq 0$ на X, то на X

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow f(x)h(x)=g(x)h(x). \qquad \text{(УР 5)}$$

5. Если обе части неравенства неотрицательны на X, то возведение в квадрат обеих частей приводит к равносильному неравенству, т. е.

$$f(x)<g(x) \Leftrightarrow f^2(x)<g^2(x). \qquad \text{(УР 6)}$$

Если обе части неравенства отрицательны, то умножив обе части на (–1), придём к неравенству противоположного знака, но с положительными частями, и к нему применим (УР 6).

Если левая и правая части неравенства имеют ***разные*** знаки, то возведение в квадрат может привести как к верному, так и к неверному неравенству: $-4<5;\ 16<25;\ -7<5,$ но $49>25,$ поэтому в этом случае ***нельзя*** возводить неравенство в квадрат.

6. Если обе части уравнения ***неотрицательны***, то

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow f^2(x)=g^2(x). \qquad \text{(УР 7)}$$

7. Для любых $f(x)$ и $g(x)$ на X и любого натурального n

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow f^{2n+1}(x)=g^{2n+1}(x). \qquad \text{(УР 8)}$$

8. Неравенство вида $f(x)\geq 0(\leq 0)$ называется нестрогим. По определению,

$$f(x)\geq 0(\leq 0) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0, \\ f(x)>0(<0). \end{array}\right. \qquad \text{(УР 9)}$$

§2. Иррациональные неравенства

Иррациональными называют неравенства, в которых переменные входят под знаком корня. Так как корень чётной степени существует только у неотрицательных чисел, то при решении неравенств, содержащих такое выражение, прежде всего удобно найти ОДЗ.

Пример 3. (МГУ, 1998) Решите неравенство $\sqrt{x+3} > x+1$.

♦ Это неравенство можно решить несколькими способами. Решим его графически (рис. 1). Построим графики функций $y=\sqrt{x+3}$, $y=x+1$ и посмотрим, где первый график расположен выше второго. Для нахождения решения останется решить только уравнение $\sqrt{x+3}=x+1$ (и не надо рассматривать случаи разных знаков для $x+1$!).

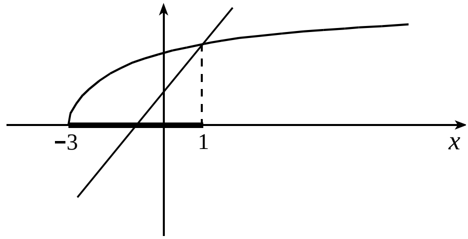

Рис. 1

$$\sqrt{x+3}=x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0, \\ x+3=x^2+2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow x \in [-3;1).$$

Ответ: $[-3;1)$. ♦

Сначала приведём уже выведенные в 10-ом классе условия равносильности для уравнений (в частности, для того, чтобы была понятна приведённая уже здесь нумерация условий равносильности для корней (УР К)):

$$\sqrt{f(x)}=a^2 \Leftrightarrow f(x)=a^4. \qquad \text{(УР К 1)}$$

$$\sqrt{f(x)}=g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x)=g^2(x). \end{cases} \qquad \text{(УР К 2)}$$

$$\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)} \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} f(x)=g(x). \qquad \text{(УР К 3)}$$

$$\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x), \\ \left[\begin{array}{l} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0. \end{array} \right. \end{cases} \qquad \text{(УР К 4)}$$

п.1. **Неравенства вида** $\sqrt{f(x)} \geq g(x)$ и $\sqrt{f(x)} \leq g(x)$.

ОДЗ: $f(x) \geq 0$.

Рассмотрим неравенство $\sqrt{f(x)} \geq g(x)$. Докажем, что

$\sqrt{f(x)} \ge g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \ge 0; \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \ge 0, \\ f(x) \ge g^2(x). \end{cases} \end{array} \right.$	(УР К5)

1. Если x является решением неравенства $\sqrt{f(x)} \ge g(x)$, то $f(x) \ge 0$ и $\sqrt{f(x)}$ существует. При этом неравенство заведомо выполнено при $g(x) < 0$. Если же $g(x) \ge 0$, то возведение в квадрат обеих частей неравенства приводит к равносильному неравенству $f^2(x) \ge g^2(x)$.

2. Пусть теперь x является решением совокупности неравенств

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \ge 0; \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \ge 0, \\ f(x) \ge g^2(x). \end{cases} \end{array} \right.$$

Тогда: а) если $g(x) < 0$ и $f(x) \ge 0$, то существует $\sqrt{f(x)}$ и заведомо выполнено неравенство $\sqrt{f(x)} \ge g(x)$;

б) если $g(x) \ge 0$ и $f(x) - g^2(x) \ge 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{f(x)} - g(x)\right)\left(\sqrt{f(x)} + g(x)\right) \ge 0$, то $f(x) - g^2(x) \ge 0 \Leftrightarrow \sqrt{f(x)} - g(x) \ge 0$.

Можно ОДЗ неравенства найти отдельно, тогда условие равносильности примет вид:

$$\sqrt{f(x)} \ge g(x) \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} g(x) < 0; \\ \begin{cases} g(x) \ge 0, \\ f(x) \ge g^2(x). \end{cases} \end{array} \right. \qquad \text{(УР К6)}$$

Теперь рассмотрим неравенство *вида*

$$\boxed{\sqrt{f(x)} \le g(x).}$$

Докажем, что

$\sqrt{f(x)} \le g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \ge 0, \\ f(x) \le g^2(x), \\ f(x) \ge 0. \end{cases}$	(УР К7)

1. Если x является решением неравенства $\sqrt{f(x)} \le g(x)$, то $f(x) \ge 0$ и существует $\sqrt{f(x)}$, а тогда $g(x) \ge 0$, и возведение в квадрат обеих частей неравенства приводит к равносильному неравенству $f(x) \le g^2(x)$.

2. Если x является решением системы неравенств $\begin{cases} g(x) \ge 0, \\ f(x) \le g^2(x), \\ f(x) \ge 0, \end{cases}$

то $f(x) \ge 0$ и существует $\sqrt{f(x)}$, а тогда $f(x) - g^2(x) \le 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \left(\sqrt{f(x)} - g(x)\right)\left(\sqrt{f(x)} + g(x)\right) \le 0$. Но, по условию, $g(x) \ge 0$, поэтому $f(x) - g^2(x) \le 0 \Leftrightarrow \sqrt{f(x)} - g(x) \le 0$.

Пример 4. (МФТИ, 1998) Решите неравенство $3\sqrt{3x^2 - 8x - 3} > 1 - 2x$.

♦ ***Первый способ***

Воспользуемся (УР К6):

$$3\sqrt{3x^2 - 8x - 3} > 1 - 2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1 - 2x < 0, \\ 3x^2 - 8x - 3 \ge 0; \end{cases} \\ \begin{cases} 1 - 2x \ge 0, \\ 9\left(3x^2 - 8x - 3\right) > (1 - 2x)^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 0,5, \\ x \in \left(-\infty; \dfrac{-1}{3}\right] \cup [3; +\infty); \end{cases} \\ \begin{cases} x \le 0,5, \\ x \in \left(-\infty; \dfrac{34 - 30\sqrt{2}}{23}\right) \cup \left(\dfrac{34 + 30\sqrt{2}}{23}; +\infty\right) \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in [3; +\infty) \\ x \in \left(-\infty; \dfrac{34 - 30\sqrt{2}}{23}\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{34-30\sqrt{2}}{23}\right) \cup [3; +\infty).$$ **Ответ:** $\left(-\infty; \frac{34-30\sqrt{2}}{23}\right) \cup [3; +\infty)$.

Второй способ

Можно оформить решение неравенства и несколько по – другому. Найдём сначала ОДЗ:

$$3x^2 - 8x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow (x-3)\left(x+\frac{1}{3}\right) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right] \cup [3; +\infty).$$

Теперь неравенство перепишем в виде $3\sqrt{3x^2-8x-3} - (1-2x) > 0.$

1. Если $1-2x<0$, т. е. $x > \frac{1}{2}$, то неравенство выполнено в ОДЗ, т. е. $x \in [3; +\infty)$.

2. Если $1-2x \geq 0$, т. е. $x \leq \frac{1}{2}$, то

$$3\sqrt{3x^2-8x-3} > 1-2x \Leftrightarrow 9(3x^2-8x-3) > 1-4x+4x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 23x^2 - 68x - 28 > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{34-30\sqrt{2}}{23}\right) \cup \left(\frac{34+30\sqrt{2}}{23}; +\infty\right).$$

Заметим, что ОДЗ в этом случае выполнилось *автоматически.*

Учтём, что $x \leq \frac{1}{2}$ – тогда $x \in \left(-\infty; \frac{34-30\sqrt{2}}{23}\right)$.

Объединяя 1 и 2, получаем

Ответ: $\left(-\infty; \frac{34-30\sqrt{2}}{23}\right) \cup [3; +\infty)$. ♦

п.2. Неравенство вида $\sqrt{f(x)} \leq \sqrt{g(x)}$.

Рассмотрим неравенство *вида* $\sqrt{f(x)} \leq \sqrt{g(x)}$.

Докажем, что

$\sqrt{f(x)} \leq \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq g(x), \\ f(x) \geq 0. \end{cases}$	(УР К8)

1. Если $\sqrt{f(x)} \le \sqrt{g(x)}$, то $f(x) \ge 0$, $g(x) \ge 0$ и $f(x) \le g(x)$, т. е. x является решением системы неравенств $\begin{cases} f(x) \le g(x), \\ f(x) \ge 0. \end{cases}$

2. Если x является решением системы неравенств $\begin{cases} f(x) \le g(x), \\ f(x) \ge 0, \end{cases}$ то $f(x) \ge 0$, $g(x) \ge 0$, $\sqrt{f(x)}$ и $\sqrt{g(x)}$ существуют. При этом $f(x) \le g(x) \Leftrightarrow \sqrt{f(x)} \le \sqrt{g(x)}$, т. е. неравенство выполнено.

Замечание. Для строгих неравенств в условиях равносильности надо просто заменить значок $\ge$ или $\le$ на $>$ или $<$ соответственно.

Пример 5. Решите неравенство $\sqrt{2x+1} \le \sqrt{x^3 - 4x^2 + x + 5}$.

♦ $\sqrt{2x+1} \le \sqrt{x^3 - 4x^2 + x + 5} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 \le x^3 - 4x^2 + x + 5 \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 - x + 4 \ge 0, \\ 2x+1 \ge 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x+1)(x-4) \ge 0 \Leftrightarrow x \in [-1;1] \cup [4;+\infty), \\ x \ge -\dfrac{1}{2}. \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{2};1\right] \cup [4;+\infty).$$

Ответ: $\left[-\frac{1}{2};1\right] \cup [4;+\infty)$. ♦

п.3. Неравенства вида $\dfrac{\sqrt{f(x)} - g(x)}{h(x)} \le 0$.

Роль сопряжённых выражений

Обычно при решении неравенств, имеющих ОДЗ, надо сначала найти ОДЗ. При нахождении ОДЗ такого сложного неравенства, как $\dfrac{\sqrt{f(x)} - g(x)}{h(x)} \ge 0$, учителя и школьники обычно решают систему $\begin{cases} f(x) \ge 0, \\ h(x) \ne 0 \end{cases}$. Затем школьники иногда ошибочно опускают знаменатель и решают неравенство $\sqrt{f(x)} - g(x) \ge 0$.

Мы в ОДЗ *дроби не будем* записывать условие $h(x)\neq 0$ и тем более не будем тратить время и силы на решение этого неравенства. Оправдывается это тем, что в дальнейшем используем только *классический* метод интервалов для рациональных функций, в котором условие $h(x)\neq 0$ автоматически выполняется, ибо нули знаменателя наносятся на числовую ось *кружочками* («дырками»), т. е. ограничение $h(x)\neq 0$ *заложено в самом методе*. Это ОДЗ, которое отличается от привычного школьного $\left(\text{с } h(x)\neq 0\right)$, по предложению самих учителей, будем обозначать не ОДЗ, а ОДЗ*. Итак, например, для неравенств вида $\dfrac{\sqrt{f(x)}-g(x)}{h(x)}\geq 0$ будем искать ОДЗ*: $f(x)\geq 0$.

Рассмотрим довольно часто встречающееся неравенство вида

$$\boxed{\dfrac{\sqrt{f(x)}-g(x)}{h(x)}\geq 0\,(\leq 0).}$$

В методической литературе предлагается рассмотреть две системы в зависимости от знака знаменателя $h(x)$, причём в каждой есть неравенство с корнем. Энтузиазм решать задачу при этом быстро «испаряется».

Мы поступим *иначе:* рассмотрим два случая в зависимости не от знака $h(x)$, а от *знака* $g(x)$, и неравенств с корнем решать *не придётся*.

Рассмотрим отдельно *разность* $\sqrt{f(x)}-g(x)$. Отметим две особенности поведения этой разности:

1) если $g(x)<0$, то разность $\sqrt{f(x)}-g(x)$ положительна в ОДЗ;

2) если $g(x)\geq 0$, то разность $\sqrt{f(x)}-g(x)$ может быть как положительной, так и отрицательной в ОДЗ. Заметим, однако, что в этом случае сумма $\sqrt{f(x)}+g(x)$ всегда неотрицательна в ОДЗ, а умножение разности $\left(\sqrt{f(x)}-g(x)\right)$ на неотрицательное выражение $\left(\sqrt{f(x)}+g(x)\right)$ не изменит знака разности, т. е. выражение

$$\left(\sqrt{f(x)}-g(x)\right)\left(\sqrt{f(x)}+g(x)\right)\equiv f(x)-g^2(x)$$

имеет тот же знак, что и $\left(\sqrt{f(x)}-g(x)\right)$ в ОДЗ. Новое выражение уже не содержит радикалов (корней), а выражение $\left(\sqrt{f(x)}+g(x)\right)$ называется сопряжённым для $\left(\sqrt{f(x)}-g(x)\right)$ выражением. Отсюда следует важное правило **ПК1**:

Если $g(x)\geq 0$, то знак разности $\sqrt{f(x)}-g(x)$ совпадает со знаком разности $f(x)-g^2(x)$ в ОДЗ.	(П К1)

Теперь используем эти свойства для решения довольно сложных неравенств вида

$$\boxed{\frac{\sqrt{f(x)}-g(x)}{h(x)}\geq 0 \text{ или } \left(\sqrt{f(x)}-g(x)\right)h(x)\geq 0.}$$

Сейчас мы покажем, что можно обойтись, хотя и двумя случаями, но без корней.

Рассмотрим, для определённости, неравенство $\dfrac{\sqrt{f(x)}-g(x)}{h(x)}\geq 0.$

1. Мы уже заметили, что, если $g(x)<0$, то числитель положителен в ОДЗ. Но тогда $\dfrac{\sqrt{f(x)}-g(x)}{h(x)}\geq 0 \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} h(x)>0.$

2. Если же $g(x)\geq 0$, то разность может менять знак в зависимости от значений x, но сумма $\sqrt{f(x)}+g(x)$ всегда неотрицательна в ОДЗ, и умножение обеих частей неравенства на это *сопряжённое* выражение приводит к равносильному неравенству, т. е. в этом случае $\dfrac{\sqrt{f(x)}-g(x)}{h(x)}\geq 0 \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} \dfrac{f(x)-g^2(x)}{h(x)}\geq 0$. Для неравенства другого знака меняется лишь знак неравенства. Объединив оба условия, получаем новое замечательное условие равносильности в ОДЗ:

$\dfrac{\sqrt{f(x)}-g(x)}{h(x)}\geq 0\,(\leq 0) \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l}\begin{cases} g(x)<0, \\ h(x)>0\,(<0), \end{cases} \\ \begin{cases} g(x)\geq 0, \\ \dfrac{f(x)-g^2(x)}{h(x)}\geq 0\,(\leq 0). \end{cases}\end{array}\right.$	(УРК16)

Найденные в результате исследования совокупности (УР К9) решения следует сравнить с ОДЗ.

Пример 6. (МГУ, 1995) Решите неравенство $\dfrac{4x+15-4x^2}{\sqrt{4x+15}+2x}\ge 0.$

♦ ОДЗ*. $4x+15\ge 0 \Leftrightarrow x\ge -\dfrac{15}{4}.$ Теперь в ОДЗ преобразуем неравенство: $\dfrac{4x+15-4x^2}{\sqrt{4x+15}+2x}=\dfrac{\left(\sqrt{4x+15}+2x\right)\left(\sqrt{4x+15}-2x\right)}{\sqrt{4x+15}+2x}\ge 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{4x+15}-2x\ge 0,\\ \sqrt{4x+15}+2x\ne 0.\end{cases}$$

Попробуем решить эту систему графически. Из графика на рис. 2 видно, что неравенство выполнено от точки $x=-\dfrac{15}{4}$ до абсциссы точки пересечения кривой $y=\sqrt{4x+15}$ и прямой $y=2x$.

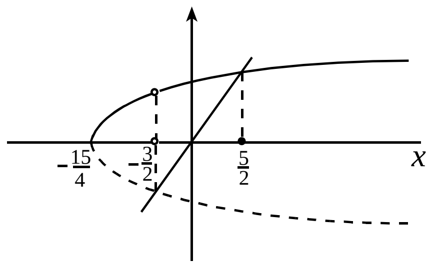

Рис. 2

Найдём эту абсциссу:

$$\sqrt{4x+15}=2x \Leftrightarrow \begin{cases}2x\ge 0,\\ 4x+15=4x^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x\ge 0,\\ \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{3}{2},\\ x=\dfrac{5}{2}\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{5}{2}.$$

Заметим, что для решения уравнения мы возводили обе части в квадрат, а, значит, одновременно с нашим решили «чужое» уравнение:

$$\sqrt{4x+15}+2x=0 \Leftrightarrow \sqrt{4x+15}=-2x \Leftrightarrow \begin{cases}2x\le 0,\\ 4x+15=4x^2.\end{cases}$$

А в нашей системе решение этого уравнения $x=-\dfrac{3}{2}$ как раз нам надо исключить. Главное в том, что для решения **всей** системы оказалось достаточно решить **единственное уравнение** $4x+15=4x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{3}{2},\\ x=\dfrac{5}{2}.\end{array}\right.$

Теперь можно записать **Ответ:** $x \in \left[-\frac{15}{4}; -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right]$. ♦

Пример 7. Решите неравенство $\frac{\sqrt{2-x}+4x-3}{x} \geq 2$.

► Найдём сначала ОДЗ*: $2-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$. Теперь воспользуемся (УР К9):

$$\frac{\sqrt{2-x}+4x-3}{x} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2-x}+(2x-3)}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2-x}-(3-2x)}{x} \geq 0 \overset{ОДЗ^*}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3-2x<0, \\ x>0; \end{cases} \\ \begin{cases} 3-2x \geq 0, \\ \frac{2-x-(2x-3)^2}{x} \geq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>\frac{3}{2}, \\ \begin{cases} x \leq \frac{3}{2}, \\ \frac{4x^2-11x+7}{x} \leq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>\frac{3}{2}, \\ \begin{cases} x \leq \frac{3}{2}, \\ \frac{\left(x-\frac{7}{4}\right)(x-1)}{x} \leq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>\frac{3}{2}, \\ x \in (-\infty; 0) \cup \left[1; \frac{3}{2}\right] \end{array}\right. \overset{с\ учётом\ ОДЗ^*}{\Leftrightarrow} x \in (-\infty; 0) \cup [1; 2].$$

Систему неравенств $\begin{cases} x \leq \frac{3}{2}, \\ \frac{\left(x-\frac{7}{4}\right)(x-1)}{x} \leq 0 \end{cases}$ решили классическим методом интервалов – рис. 3.

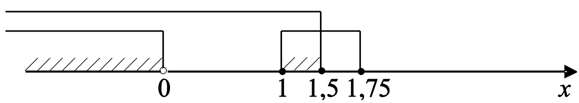

Рис. 3

Ответ: $(-\infty; 0) \cup [1; 2]$. ◄

Пример 8. $\frac{\sqrt{x^2-4x+3}-2(x+7)}{x^2-x-72} \leq 0.$

►Неравенство довольно громоздкое и сложное.

Найдём сначала ОДЗ*: $x^2-4x+3\ge 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3)\ge 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x\in(-\infty;\,1]\cup[3;\,+\infty).$ Затем рассмотрим *отдельно* два случая в зависимости от знака $(x+7)$.

1. Если $x+7<0 \Leftrightarrow x<-7,$ то числитель положителен в ОДЗ* и
$$\frac{\sqrt{x^2-4x+3}-2(x+7)}{x^2-x-72}\le 0 \overset{ОДЗ*}{\Leftrightarrow} x^2-x-72<0 \Leftrightarrow (x+8)(x-9)<0 \Leftrightarrow$$
$x\in(-8;\,-7)$.Учитывая ограничение $x<-7$, получаем, что оказалось, что этот промежуток принадлежит ОДЗ*.

2. Если $x+7\ge 0 \Leftrightarrow x\ge -7,$ то воспользуемся правилом П К1. Тогда
$$\frac{\sqrt{x^2-4x+3}-2(x+7)}{x^2-x-72}\le 0 \overset{ОДЗ*}{\Leftrightarrow} \frac{(x^2-4x+3)-(2(x+7))^2}{(x-9)(x+8)}\le 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{3x^2+60x+193}{(x+8)(x-9)}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{\left(x-\frac{-30-\sqrt{321}}{3}\right)\left(x-\frac{-30+\sqrt{321}}{3}\right)}{(x+8)(x-9)}\ge 0 \overset{x\ge -7}{\Leftrightarrow}$$
$\Leftrightarrow \left[-7;\,\frac{-30+\sqrt{321}}{3}\right]\cup(9;\,+\infty)$ с учётом ограничения $x\ge -7$. Оказалось, что и эти промежутки принадлежат ОДЗ*. Поэтому
$$x\in\left(-8;\,\frac{-30+\sqrt{321}}{3}\right]\cup(9;\,+\infty).$$

Ответ: $\left(-8;\,\frac{-30+\sqrt{321}}{3}\right]\cup(9;\,+\infty)$. ◄

п.4. Неравенства вида $\frac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}}{h(x)}\ge 0\ (\le 0)$.

Роль сопряжённых выражений

Теперь рассмотрим неравенство вида $\frac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}}{h(x)}\ge 0\ (\le 0)$.

На вид довольно сложное неравенство. Разность $\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}$ где-то на числовой оси положительна, где-то отрицательна, но *сумма* корней

$\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}$ всегда неотрицательна в ОДЗ. Поэтому умножение обеих частей неравенства на это *сопряжённое* выражение приводит к равносильному в ОДЗ неравенству, и имеет место условие равносильности в ОДЗ

$\dfrac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}}{h(x)}\geq 0 \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} \dfrac{f(x)-g(x)}{h(x)}\geq 0$	(УР К10),

или полное условие равносильности, включающее ОДЗ:

$\dfrac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}}{h(x)}\geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\geq 0, \\ g(x)\geq 0, \\ \dfrac{f(x)-g(x)}{h(x)}\geq 0 \end{cases}$	(УР К11)

Отсюда, в частности, следует полезное правило (П К2):

Знак разности $\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}$ совпадает со знаком разности $f(x)-g(x)$ в ОДЗ. (П К2)

Пример 9. (Демоверсия ЕГЭ - 2010) Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{1-x^3}-1}{x+1}\leq x.$$

и найдите наименьшую длину промежутка, который содержит все его решения.

►Замечательный пример на применение (УР К11)!

Приведём всё к общему знаменателю, затем разложим разность кубов на множители. При этом учтём, что неполный квадрат суммы x^2+x+1никогда в 0 не обращается – он всегда положителен, потому что его дискриминант отрицателен. Поэтому на $\sqrt{x^2+x+1}$ можно сократить. Затем воспользуемся (УР К11), или, что то же, тем, что умножение неравенства на *положительное сопряжённое* выражение приводит к равносильному неравенству. Тогда

$$\frac{\sqrt{1-x^3}-1}{1+x}\leq x \Leftrightarrow \frac{\sqrt{1-x^3}-1-x-x^2}{1+x}\leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{(1-x)\left(x^2+x+1\right)}-\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^2}{1+x}\leq 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{x^2+x+1}}{1+x}\leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt{1-x}-\sqrt{x^2+x+1}\right)\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{x^2+x+1}\right)}{1+x} \le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x \ge 0, \\ \dfrac{(1-x)-\left(x^2+x+1\right)}{1+x} \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le 1, \\ \dfrac{x(x+2)}{1+x} \ge 0 \Leftrightarrow x \in [-2;\,-1) \cup [0;\,+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-2;\,-1) \cup [0;\,1].$$

Неравенство решено методом интервалов – рис. 4.

Наименьшая длина промежутка, который содержит все решения, равна 3.

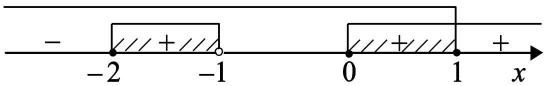

Рис. 4

Ответ: $[-2;\,-1) \cup [0;\,1],\ 3.$ ◄

Пример 10. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{4x^2-3x+2}-\sqrt{4x-3}}{x^2-5x+6} \le 0$ и найдите наименьшую длину промежутка, который содержит все его решения.

► Найдём сначала ОДЗ*: $\begin{cases} 4x^2-3x+2 \ge 0, \\ 4x-3 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge \dfrac{3}{4}.$

Теперь можно решить неравенство, применив правило (П К2):

$$\frac{\sqrt{4x^2-3x+2}-\sqrt{4x-3}}{x^2-5x+6} \le 0 \overset{ОДЗ*}{\Leftrightarrow} \frac{4x^2-3x+2-4x+3}{x^2-5x+6} \le 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \dfrac{4x^2-7x+5}{x^2-5x+6} \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{(x-2)(x-3)} \le 0 \Leftrightarrow x \in (2;3).$ Промежуток принадлежит ОДЗ*. Наименьшая длина промежутка, который содержит все решения, равна 1. **Ответ.** $(2;\,3),\ 1.$ ◄

п.5. Нестрогое неравенство $\dfrac{\sqrt{f(x)}}{g(x)} \ge 0 (\le 0).$

Воспользуемся определением нестрогого неравенства и особенностью иррациональных неравенств.

Получим

$$\frac{\sqrt{f(x)}}{g(x)} \ge 0(\le 0) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x)=0, \\ g(x)\ne 0; \end{cases} \\ \begin{cases} f(x)>0, \\ g(x)>0(<0). \end{cases} \end{array}\right. \qquad \text{(УР10)}$$

Пример 11. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{6-x-x^2}}{x^2-1} \le 0.$

♦ Воспользуемся (УР10): $\dfrac{\sqrt{6-x-x^2}}{x^2-1} \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 6-x-x^2=0, \\ x^2-1\ne 0; \end{cases} \\ \begin{cases} 6-x-x^2>0, \\ x^2-1<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\left[\begin{array}{l} x=-3, \\ x=2, \\ \begin{cases} x\in(-3;2), \\ x\in(-1;1) \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in\{-3\}\cup(-1;1)\cup\{2\}.$ **Ответ:** $\{-3\}\cup(-1;1)\cup\{2\}.$ ♦

§3. Неравенства, содержащие модуль

В этом параграфе рассматриваются неравенства, содержащие переменную под знаком абсолютной величины (под знаком модуля).

Во многих случаях для решения таких неравенств целесообразно разбить числовую ось на промежутки так, чтобы функции, стоящие под знаком модуля, на каждом из промежутков сохраняли знак, т. е. были или положительными, или отрицательными. Тогда на каждом таком промежутке неравенство можно записать без модуля. В таком случае говорят, что мы раскрыли модуль.

Пример 12. (МГУ, 1993) Решите неравенство $\dfrac{|x-1|}{x+2} < 1.$

♦ $\dfrac{|x-1|}{x+2} < 1 \Leftrightarrow \dfrac{|x-1|-x-2}{x+2} < 0.$

1. $x-1\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 1$: $\dfrac{x-1-x-2}{x+2} = -\dfrac{3}{x+2} < 0 \Leftrightarrow x>-2.$

Получаем в этом случае $x\ge 1$.

2. $x-1<0 \Leftrightarrow x<1$: $\dfrac{-x+1-x-2}{x+2}=-\dfrac{2x+1}{x+2}<0 \Leftrightarrow \dfrac{x+0,5}{x+2}>0$.

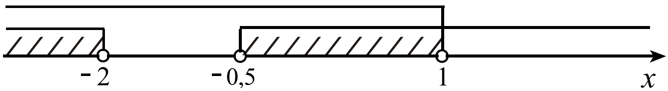

Рис. 5

И мы получаем в этом случае $x\in(-\infty;-2)\cup(-0,5;1)$.
Объединяя результаты 1. 2., получаем окончательный

Ответ: $(-\infty;-2)\cup(-0,5;+\infty)$

Пример 13. (МГУ, 1992) Решите неравенство $\dfrac{|x-5|-1}{2|x-6|-4}\le 1$.

♦ $\dfrac{|x-5|-1}{2|x-6|-4}\le 1 \Leftrightarrow \dfrac{|x-5|-2|x-6|+3}{2|x-6|-4}\le 0.$

1. $x>6$: $\dfrac{x-5-2x+12+3}{2x-12-4}=\dfrac{10-x}{2x-16}\le 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;8)\cup[10;+\infty)$.

Учитывая условие $x>6$, получаем $x\in(6;8)\cup[10;+\infty)$.

2. $5\le x\le 6$: $\dfrac{x-5+2x-12+3}{-2x+12-4}=\dfrac{3x-14}{8-2x}\le 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;4)\cup\left[\dfrac{14}{3};+\infty\right)$.

Учитывая условие $x\in[5;6]$, получаем $x\in[5;6]$.

3. $x<5$: $\dfrac{-x+5+2x-12+3}{-2x+12-4}=\dfrac{x-4}{8-2x}\le 0 \Leftrightarrow \begin{cases}-1\le 0,\\ x\ne 4.\end{cases}$

Учитывая условие $x<5$, получаем $x\in(-\infty;4)\cup(4;5)$.

Ответ: $(-\infty;4)\cup(4;8)\cup[10;+\infty)$. ♦

п.1. Неравенства вида $|f(x)|<g(x)$

Пусть в некоторой точке a выполнено неравенство $|f(x)|<g(x)$, тогда $g(a)>0$ и $|f(a)|<g(a)$.

Тогда имеет место картинка

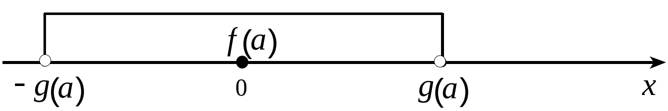

Рис. 6

и неравенства $-g(a)<f(a)<g(a)$.

И, наоборот: пусть в некоторой точке a выполнены неравенства $-g(a) < f(a) < g(a)$. Тогда, во-первых, $-g(a) < g(a) \Leftrightarrow g(a) > 0$, а, во-вторых, $|f(a)| < g(a)$. Следовательно, имеет место условие равносильности

$$\boxed{|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow -g(x) < f(x) < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > -g(x). \end{cases}} \qquad \text{(УР М1)}$$

п.2. Неравенство вида $|f(x)| > g(x)$.

Пусть в некоторой точке a неравенство выполнено, т. е.

$$|f(x)| > g(x).$$

Это означает, что, или,

а) $g(a) < 0$ (модуль принимает неотрицательные значения и всегда больше любого отрицательного числа), или,

б) если $g(x) \geq 0$, имеет место картинка

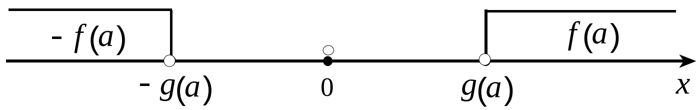

Рис. 7

и совокупность неравенств $\left[\begin{array}{l} f(a) > g(a), \\ f(a) < -g(a). \end{array} \right.$

И, наоборот, пусть в некоторой точке a имеет место совокупность неравенств $\left[\begin{array}{l} f(a) > g(a), \\ f(a) < -g(a). \end{array} \right.$ Тогда,

а) если $g(a) < 0$, то неравенство $|f(a)| > g(a)$ выполнено,

б) если $g(a) \geq 0$, то имеет место предыдущая картинка и выполнено неравенство $|f(a)| > g(a)$.

Следовательно, имеем равносильные соотношения

$$\boxed{|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x). \end{array} \right.} \qquad \text{(УР М2)}$$

Пример 14. (МГУ, 2000, ВМК) Решите неравенство

$$\left\|x^2-8x+2\right|-x^2\right|\ge 2x+2.$$

♦ $\left\|x^2-8x+2\right|-x^2\right|\ge 2x+2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left|x^2-8x+2\right|-x^2\ge 2x+2, \\ \left|x^2-8x+2\right|-x^2\le -2x-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left|x^2-8x+2\right|\ge x^2+2x+2, \\ \left|x^2-8x+2\right|\le x^2-2x-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-8x+2\ge x^2+2x+2, \\ x^2-8x+2\le -x^2-2x-2; \\ \begin{cases} x^2-8x+2\le x^2-2x-2, \\ x^2-8x+2\ge -x^2+2x+2 \end{cases} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x\le 0, \\ x\in[1;2], =2, \\ \begin{cases} x\ge \dfrac{2}{3}, \in(-3;2), \\ x\in(-\infty;0]\cup[5;\infty) \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in(-\infty;0]\cup[1;2]\cup[5;\infty). \Leftrightarrow$

Ответ: $(-\infty;0]\cup[1;2]\cup[5;+\infty)$. ♦

п.3. Неравенство вида $|f(x)|<|g(x)|$

Рассмотрим разность $|f(x)|-|g(x)|$. Она может быть любого знака, но сумма $|f(x)|+|g(x)|$ всегда неотрицательна, и умножение разности на эту сумму не изменит знака разности, т. е.

$$(|f(x)|-|g(x)|)(|f(x)|+|g(x)|)=$$
$$=\left(|f(x)|^2-|g(x)|^2\right)=\left(f^2(x)-g^2(x)\right)=(f(x)-g(x))(f(x)+g(x))$$ и

знак разности $|f(x)|-|g(x)|$ совпадает со знаком произведения $(f(x)+g(x))(f(x)-g(x))$ (П М1)

Имеем еще одно условие равносильности

$$\boxed{|f(x)|<|g(x)| \Leftrightarrow (f(x)-g(x))(f(x)+g(x))<0.}$$ (УР М3)

Пример 15. (МФТИ, 2000)

Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{-x^2+7x-6}}{\left|x^2-6x+5\right|-\left|x^2-2x-3\right|}\le 0.$

♦ ОДЗ*: $-x^2+7x-6\ge 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-6)\le 0 \Leftrightarrow x\in[1;6].$

В ОДЗ* имеем $\dfrac{\sqrt{-x^2+7x-6}}{\left|x^2-6x+5\right|-\left|x^2-2x-3\right|}\le 0 \Leftrightarrow$ (в силу УРМЗ)

$$\frac{\sqrt{-x^2+7x-6}}{\left(2x^2-8x+2\right)\left(-4x+8\right)}\le 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{-x^2+7x-6}}{\left(x-\left(2+\sqrt{3}\right)\right)\left(x-\left(2-\sqrt{3}\right)\right)\left(x-2\right)}\ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2-7x+6=0, \\ x\ne 2\pm\sqrt{3}, \\ x\ne 2, \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=6, \end{array}\right. \\ \left(x-\left(2+\sqrt{3}\right)\right)\left(x-\left(2-\sqrt{3}\right)\right)\left(x-2\right)>0 \Leftrightarrow \left(2-\sqrt{3};2\right)\cup\left(2+\sqrt{3};+\infty\right). \end{array}\right.$$

Учитывая ОДЗ*, получаем

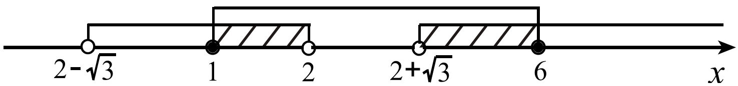

Рис. 8

Ответ: $[1;2)\cup\left(2+\sqrt{3};6\right].$ ♦

§4. Системы уравнений

1. Самым распространенным методом решений систем является метод **последовательного исключения** неизвестных: выражаем одно неизвестное из одного из уравнений и подставляем в остальные. Получаем новую систему, в которой число уравнений и неизвестных на одно меньше. С новой системой поступаем так же до тех пор, пока это возможно.

Однако очень часто при решении системы этим способом мы приходим к уравнениям, которые невозможно решить. Общих правил для решения систем не существует, но для некоторых систем существуют специальные приемы.

2. Однородные системы

3. Симметрические системы

4. Часто систему можно решить, если её сначала упростить с помощью **равносильных** преобразований.

Приведем примеры некоторых преобразований, приводящих к равносильным системам.

1. Если любое уравнение системы заменить равносильным ему уравнением, то получим равносильную систему.

2. Если в одном из уравнений системы левая часть является произведением двух функций, то система равносильна совокупности при условии, что справа 0. Например,

$$\begin{cases} f_1(x,y)\,f_2(x,y)=0, \\ g(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f_1(x,y)=0, \\ g(x,y)=0. \end{cases} \\ \begin{cases} f_2(x,y)=0 \\ g(x,y)=0. \end{cases} \end{array}\right. \qquad \text{(УР С1)}$$

3. Если какое-нибудь уравнение системы умножить на число, отличное от нуля, то получится система, равносильная исходной. (УР С3)

4. Если к одному из уравнений системы прибавить линейную комбинацию нескольких других, то получим равносильную систему. Например, $\begin{cases} f_1(x,y)=0, \\ f_2(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x,y)+af_2(x,y)=0, \\ f_2(x,y)=0, \end{cases}$ (УР С2)

$a-$ произвольное число.

5. $\begin{cases} f_1(x,y)=g_1(x,y), \\ f_2(x,y)=g_2(x,y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x,y)g_1(x,y)\ge 0, \\ f_1^2(x,y)=g_1^2(x,y), \\ f_2(x,y)=g_2(x,y) \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f_1(x,y)=0, \\ g_1(x,y)=0, \\ f_2(x,y)=g_2(x,y); \end{cases} \\ \begin{cases} f_1(x,y)g_1(x,y)>0, \\ f_1^2(x,y)=g_1^2(x,y), \\ f_2(x,y)=g_2(x,y). \end{cases} \end{array}\right. \qquad \text{(УРС3)}$$

Обратим внимание на то, что в равносильной системе появилось ***дополнительное неравенство!*** (т. к. возведение в квадрат не всегда приводит к равносильному уравнению.)

6. $$\begin{cases} f_1(x,y)=g_1(x,y), \\ f_2(x,y)=g_2(x,y) \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f_1(x,y)=g_1(x,y)=0, \\ f_2(x,y)=g_2(x,y); \end{cases} \\ \begin{cases} f_1(x,y)=g_1(x,y)\neq 0, \\ f_2(x,y)\,f_1(x,y)=g_2(x,y)\,g_1(x,y). \end{cases} \end{array} \right.$$ (УР С4)

Обратим внимание на то, что в системе остается то уравнение, в котором **обе части отличны от нуля!**

7. $$\begin{cases} f(x,y)=0, \\ g(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x,y)+g(x,y)=0, \\ f(x,y)-g(x,y)=0 \end{cases}$$ (УР С5)

т. к.

$$\begin{cases} f(x,y)=0, \\ g(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x,y)+g(x,y)=0, \\ g(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x,y)+g(x,y)=0, \\ f(x,y)+g(x,y)-2g(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x,y)+g(x,y)=0, \\ f(x,y)-g(x,y)=0. \end{cases}$$

Пример 16. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x^2+y-z=3, \\ y+z-2x=1, \\ x^4+yz+y-2z=3. \end{cases}$

♦ Выразим y из второго уравнения $y=1-z+2x$, подставим в первое и третье и получим систему с двумя неизвестными

$$\begin{cases} 2x^2+(1-z+2x)-z=3, \\ x^4+z(1-z+2x)+(1-z+2x)-2z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+2x-2z=2, \\ x^4+2zx+2x-z^2-2z=2. \end{cases}$$

Теперь выразим из первого уравнения $z=x^2+x-1$ и, подставив во второе, получим уравнение с одним неизвестным

$$x^4+2x\left(x^2+x-1\right)+2x-\left(x^2+x-1\right)^2-2\left(x^2+x-1\right)=2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-1=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow z=1 \Rightarrow y=2, \\ x=-1 \Rightarrow z=-1 \Rightarrow y=0. \end{array} \right. \Rightarrow$$

Ответ: (1;2;1), (–1;0;–1).

Пример 17. Решите систему уравнений $\begin{cases} x-2y+3z=9, \\ x^2+4y^2+9z^2=189, \\ 3xz=4y^2. \end{cases}$

♦ Выразим x из первого уравнения и подставим во второе и третье уравнения. Тогда получим равносильную систему

$$\begin{cases} x = 2y - 3z + 9, \\ 4y^2 + 9z^2 - 6yz - 27z + 18y = 54 \Leftrightarrow \\ 6yz - 9z^2 + 27z - 4y^2 = 0. \end{cases}$$

Теперь прибавим ко второму уравнению третье

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - 3z + 9, \\ 18y = 54 \Leftrightarrow y = 3, \\ 18z - 9z^2 + 27z - 36 = 0 \Leftrightarrow z = \dfrac{5 \pm 3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 3, z = 4 \Rightarrow x = 3; \\ y = 3, z = 1 \Rightarrow x = 12. \end{array} \right.$$

Ответ: $(3, 3, 4), (12, 3, 1)$. ♦

Пример 18. (МФТИ, 1996) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 2xy - 8y^2 + 9x + 30y + 8 = 0, \\ x^2 + 6xy + 8y^2 - 2x - 8 = 0. \end{cases}$$

♦ В данной системе будем рассматривать каждое уравнение как квадратное относительно, например, x. Так как дискриминанты обоих уравнений являются полными квадратами, оказывается возможным свести систему двух нелинейных уравнений к совокупности четырёх линейных систем.

$$\begin{cases} x^2 + 2xy - 8y^2 + 9x + 30y + 8 = x^2 + x(2y + 9) - (8y^2 - 30y - 8) = 0, \\ x^2 + 6xy + 8y^2 - 2x - 8 = x^2 + 2x(3y - 1) - (8 - 8y^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-2y - 9 \pm (6y - 7)}{2} \Leftrightarrow (x - 2y + 8)(x + 4y + 1) = 0, \\ x = \dfrac{-3y + 1 \pm (y - 3)}{1} \Leftrightarrow (x + 2y + 2)(x + 4y - 4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-2y+8=0, \\ x+2y+2=0; \end{cases} \\ \begin{cases} x-2y+8=0, \\ x+4y-4=0; \end{cases} \\ \begin{cases} x+4y+1=0, \\ x+2y+2=0; \end{cases} \\ \begin{cases} x+4y+1=0, \\ x+4y-4=0. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-5, \\ y=\dfrac{3}{2}; \end{cases} \\ \begin{cases} x=-4, \\ y=2; \end{cases} \\ \begin{cases} x=-3, \\ y=\dfrac{1}{2}; \end{cases} \\ \{\varnothing. \end{array}\right. \Rightarrow$$

Ответ: $\left(-5;\dfrac{3}{2}\right),(-4;2),\left(-3;\dfrac{1}{2}\right)$. ♦

Пример 19. (МФТИ, 1999) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2-4x+4y+27=0, \\ y^2+2x+8y+10=0. \end{cases}$$

$$♦ \begin{cases} x^2-4x+4y+27=0, \\ y^2+2x+8y+10=0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

Заменим второе уравнение системы суммой

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x+4y+27=0, \\ x^2-4x+4y+27+y^2+2x+8y+10=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x+4y+27=0, \\ (x-1)^2+(y+6)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, \\ y=-6 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1^2-4\cdot 1+4(-6)+27\equiv 0, \\ x=1, \\ y=-6. \end{cases}$$

Заметим, что решение второго уравнения – это ещё **не решение** системы**.** Полученные числа необходимо подставить в оставшееся первое уравнение системы. В данном случае после подстановки получаем тождество.

Ответ: (1, – 6).♦

§5. Однородные уравнения и системы

Функция $f(x,y)$ называется однородной степени k, если $f(tx,ty)=t^k f(x,y)$. Например, функция $f(x,y)=4x^3y-5xy^3+x^2y^2$ является однородной степени 4, т. к. $f(tx,ty)=4(tx)^3(ty)-5(tx)(ty)^3+$

$+(tx)^2(ty)^2 = t^4\left(4x^3y - 5xy^3 + x^2y^2\right)$. Уравнение $f(x,y)=0,$ где $f(x,y)-$ однородная функция, называется однородным. Оно сводится к уравнению с одним неизвестным, если ввести новую переменную $t=\dfrac{y}{x}$.

Система с двумя переменными $\begin{cases} f(x,y)=a, \\ g(x,y)=b \end{cases}$, где $f(x,y), g(x,y)$ – однородные функции одной и той же степени, называется однородной.

Если $ab\neq 0$, умножим первое уравнение на b, второе – на a и вычтем одно из другого – получим равносильную систему

$$\begin{cases} bf(x,y)-ag(x,y)=0, \\ g(x,y)=b. \end{cases}$$

Первое уравнение заменой переменных $t=\dfrac{x}{y}$ (или $t=\dfrac{y}{x}$) сведётся к уравнению с одним неизвестным.

Если $a=0$ $(b=0)$, то уравнение $f(x,y)=0\left(g(x,y)=0\right)$ заменой переменных $t=\dfrac{x}{y}$ (или $t=\dfrac{y}{x}$) сведётся к уравнению с одним неизвестным.

Пример 20. (МГУ, 2001, химфак) Решите систему $\begin{cases} x^2-xy+y^2=21, \\ y^2-2xy+15=0. \end{cases}$

♦ $\begin{cases} x^2-xy+y^2=21, \\ y^2-2xy=-15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5\left(x^2-xy+y^2\right)+7\left(y^2-2xy\right)=0, \\ y^2-2xy=-15 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 0, y\neq 0; \\ 5x^2-19xy+12y^2=0 \Leftrightarrow 5\left(\dfrac{x}{y}\right)^2-19\left(\dfrac{x}{y}\right)+12=0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{y}=\dfrac{19\pm 11}{10}, \Leftrightarrow \\ y^2-2xy=-15 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=3y, \\ y^2=3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 3\sqrt{3}, \\ y=\pm\sqrt{3}; \end{cases} \\ \begin{cases} x=\dfrac{4}{5}y, \\ y^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 4, \\ y=\pm 5. \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow$$

Ответ: $\left(3\sqrt{3};\sqrt{3}\right),\ \left(-3\sqrt{3};-\sqrt{3}\right),\ (4;5),\ (-4;-5).$ ♦

§6. Симметрические системы

Функция $f(x,y)$ называется симметрической, если $f(x,y)=f(y,x)$.

Система уравнений вида $\begin{cases} f(x,y)=a \\ g(x,y)=b \end{cases}$, где $f(x,y), g(x,y)$– симметрические, называется симметрической системой. Такие системы решаются чаще всего с помощью введения новых переменных $x+y=u,\ xy=v.$

Пример 21. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^3+x^3y^3+y^3=17, \\ x+xy+y=5. \end{cases}$

♦ Эта алгебраическая (симметрическая) система, обычно она решается заменой $x+y=u,\ \ xy=v$. Заметив, что

$$x^3+x^3y^3+y^3=(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)+x^3y^3=$$

$$=(x+y)\left((x+y)^2-3xy\right)+x^3y^3=u\left(u^2-3v\right)+v^3,$$

перепишем систему в виде

$$\begin{cases} u^3-3uv+v^3=17, \\ u+v=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=5-v, \\ v^2-5v+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v=2, u=3, \\ v=3, u=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

(в старых переменных)

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=2, \\ xy=3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-y, \\ y^2-2y+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing. \\ \begin{cases} x+y=3, \\ xy=2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3-y, \\ y^2-3y+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, y=1, \\ x=1, y=2. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Ответ: $(2;1),\ (1;2).$ ♦

▲ Для успешного выполнения задания необходимо помнить, что строго монотонная функция любое своё значение принимает только один раз, т. е. если функция $y(x)$ строго монотонна, то для любых $x^*\in D(y),\ \ x^{**}\in D(y)$ следует, что $y(x^*)=y(x^{**})\Leftrightarrow x^*=x^{**}.$

Вспомним ещё свойства не просто монотонных функций, а *нечётных монотонных*.

Если функция нечётная, то при любом x из области определения $f(x)=-f(-x) \Leftrightarrow f(x)+f(-x)=0$, т. е. функция в *симметричных* точках принимает «противоположные» значения.

В случае произвольной нечётной функции равенство $f(x_1)=-f(x_2)$ может выполняться в нескольких точках (не только в симметричных): например, $\sin\dfrac{\pi}{3}=-\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\sin\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

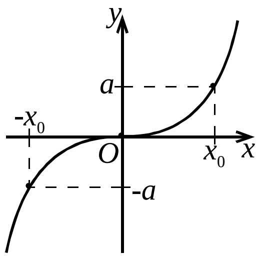

Рис. 9

Если же функция *нечётная,* а к тому же и строго *монотонная*, то равенство $f(x_1)+f(x_2)=0$ выполняется *только* в симметричных точках – вспомним график функции $y=x^3$ – рис. 9.

Итак, если $f(x)$ *нечётная* и строго *монотонная* функция, то

$$f(x_1)=-f(x_2) \Leftrightarrow f(x_1)+f(x_2)=0 \Leftrightarrow x_2=-x_1.$$

Поэтому для *такой* функции $f(x)$: $f(x)+f(g(x))=0 \Leftrightarrow x=-g(x)$.

Контрольные вопросы

1(2). Равносильны ли неравенства $\dfrac{1}{\sqrt{|x-3|-1}} \le \dfrac{1}{6-x}$ и $6-x \le \sqrt{|x-3|-1}$?

2(2). Равносильно ли неравенство $\dfrac{1}{\sqrt{|x-3|-1}} \le \dfrac{1}{6-x}$ системе неравенств $\begin{cases} 6-x>0, \\ \sqrt{|x-3|-1} \ge 6-x ? \end{cases}$

Решите неравенства 3 – 5 с помощью графиков и уравнений

3(2). $\sqrt{x+2} \ge x-4$.

4(3). $\sqrt{17-x}-\sqrt{1+3x} \le \sqrt{x+3}$.

5(3). Решите уравнение $\sqrt{7+31x-10\left|x^2+x-1\right|}=\sqrt{7}\,(2x-4)$.

Решите неравенства 6 – 10 с помощью приведённых в тексте условий равносильности (не раскрывая модули)

6(2). $\left|x^2+2x-8\right|+2x>0.$

7(3). $\left|x^3+1\right|\geq 1+x.$

8(2). $\left|\dfrac{x^2+5x+4}{x^2-4}\right|\leq 1.$

Решите неравенства 9 – 10

9(3). $\dfrac{\sqrt{42+x-x^2}-x-3}{x^2-5x-6}\geq 0.$

10(2). $\dfrac{\sqrt{2x^2-1}-\sqrt{x^2+5x-6}}{\left|x^2-3\right|-\left|x+7\right|}\leq 0.$

Задачи

Решите неравенства 1 – 5

1(3). $\dfrac{x^3-8+6x(2-x)}{\left|3-4x\right|}\leq\sqrt{4x-3}.$

2(3). $\dfrac{\sqrt{x^2-5x+6}-x+1}{2x^2-13x+30}\geq 0.$

3(3). $\dfrac{\left|x^2-5x+6\right|+\left|9-2x\right|-5}{\sqrt{19x^2-4x^3-4x+19}}\leq 0$.

4(3). $\dfrac{\sqrt{x+7}-\left|2x-1\right|}{\sqrt{8-x}-\left|2x-1\right|}\geq 1.$

5(3). $\dfrac{\left(\sqrt{x+3}+(x-3)\right)\left(\sqrt{4x+5}+(x-4)\right)}{\sqrt{(x+1)(2-x)(2+x)}}\leq 0$.

6(3). Решите систему неравенств $\begin{cases}\dfrac{2x^2-2x+1}{2x-1}\leq 1,\\ 25x^2-3\left|3-5x\right|<30x-9.\end{cases}$

7(4). Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x^2-\left(\left|a+5\right|-\left|a-5\right|\right)x+\left(a^2-144\right)=0$ имеет два различных отрицательных решения.

8(2). $3x-2\left|x-2\right|=3\sqrt{3x+18}-2\left|\sqrt{3x+18}-2\right|.$

9(3). Найдите все значения a, для каждого из которых уравнение $8x^6+\left(a-\left|x\right|\right)^3+2x^2-\left|x\right|+a=0$ имеет более трёх различных решений.

10(4). Найдите все значения a, при каждом из которых при любых x выполняется неравенство $\left|x+1\right|+2\left|x+a\right|>3-2x.$

Литература

1. С. И. Колесникова «Математика. Интенсивный курс подготовки к Единому Государственному экзамену». Москва, Айрис – Пресс (можно скачать из Интернета).
2. «Математика. Решение сложных задач Единого Государственного экзамена» (рубрика «Домашний репетитор»), Москва, Айрис – Пресс (можно скачать из Интернета).
3. Журнал «Потенциал» №№1 –2 за 2005 г – статьи С. И. Колесниковой «Иррациональные уравнения» и «Иррациональные неравенства».
4. С. И. Колесникова «Иррациональные уравнения. ЕГЭ. Математика», Москва, 2010, ООО «Азбука».
5. С. И. Колесникова «Иррациональные неравенства. ЕГЭ. Математика», Москва, 2010, ООО «Азбука».
6. С. И. Колесникова «Уравнения и неравенства, содержащие модули. ЕГЭ. Математика», Москва, 2010, ООО «Азбука»
7. С. И. Колесникова «Нестандартные задачи и современные методы решения. ЕГЭ. Математика.», Москва, 2010, ООО «Азбука».
8. С. И. Колесникова «Рациональные уравнения и неравенства. ЕГЭ. Математика.», Москва, 2010, ООО «Азбука».