Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение дополнительного образования детей
«Заочная физико-техническая школа
Московского физико-технического института
(государственного университета)»

МАТЕМАТИКА

Планиметрия (часть I)

Задание №1 для 9-х классов

(2013 – 2014 учебный год)

г. Долгопрудный, 2013

Составитель: Т.С. Пиголкина, доцент кафедры высшей математики МФТИ.

Математика: задание №1 для 9-х классов (2013 – 2014 учебный год), 2013,28 с.

Дата отправления заданий по физике и математике – 29 сентября 2013г.

Составитель:
Пиголкина Татьяна Сергеевна
Подписано 27.06.13. Формат 60×90 1/16.
Бумага типографская. Печать офсетная. Усл. печ. л. 1,75.
Уч.-изд. л. 1,55. Тираж 1100. Заказ №8-з.

Заочная физико-техническая школа
Московского физико-технического института
(государственного университета)

ООО «Печатный салон ШАНС»

Институтский пер., 9, г. Долгопрудный, Москов. обл., 141700.
ЗФТШ, тел./факс (495) 408-51-45 – **заочное отделение,**
тел./факс (498) 744-63-51 – **очно-заочное отделение,**
тел. (499) 755-55-80 – **очное отделение.**

e-mail: zftsh@mail.mipt.ru

Наш сайт: www.school.mipt.ru

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В каждом параграфе сгруппированы теоремы, которые в учебнике рассыпаны по разным главам. Здесь мы компактно напоминаем теорию, приводим примеры решения характерных задач, доказываем некоторые дополнительные утверждения, показываем определённые приёмы решений.

Прежде чем приступать к выполнению домашнего задания, рекомендуем проработать предложенный материал «с карандашом», параграф за параграфом: вспомнить одни и узнать другие теоремы, выписать и выучить формулы, прорешать приведённые примеры.

Контрольные вопросы составлены так, чтобы проверить, как Вы усвоили темы Задания, есть ли пробелы в знаниях, умеете ли Вы решать несложные задачи на доказательство, делать выводы из разобранных теорем, а также видеть «подводные камни» в вопросах и задачах.

Приступая к ответам на контрольные вопросы, сделайте рисунок (если надо) на черновике, уясните вопрос, подберите нужный пример или продумайте доказательство. Окончательные ответы должны быть достаточно подробные. В случае отрицательного ответа должен быть приведён опровергающий пример. Примеры ответов приведены в конце задания.

Задачи могут Вам показаться сложнее решаемых в школе. Если задача не получается, найдите в тексте подобную ей задачу и разберите её решение. Либо подумайте, на какую тему – и повторите соответствующий параграф, а затем сделайте ещё одну попытку.

Может случиться, что не все задачи удалось решить. Печально, но не следует приходить в отчаяние. Ведь и не предполагается, что все поступившие в ЗФТШ уже все знают и умеют. Школа как раз и хочет научить Вас, поэтому высылайте то, что получилось. Обратно Вы получите проверенную Вашу тетрадь и, кроме того, подробные решения всех задач и ответы на все вопросы. Это даст Вам возможность разобрать «неподдавшиеся» задачи, узнать, как они решаются, и в другой раз, в следующем задании, в работе в школе, на олимпиаде, выступить успешнее.

Каждый ответ и решение каждой задачи оцениваются в очках. За полное правильное решение или верный ответ выставляется то число очков, которое указано в скобках после номера вопроса или задачи. За ошибки, недочёты снимается некоторое число очков. За неверный ответ на вопрос или неправильное решение задачи ставится ноль очков.

Решение каждой задачи будем начинать символом Δ и заканчивать символом ▲, доказательство будем начинать символом □ и заканчивать символом ■. В решениях и доказательствах иногда делаем по 2 – 3 рисунка для того, чтобы легче было следить за ходом рассуждений.

§ 1. Прямоугольный треугольник. Метрические соотношения

Пусть ABC прямоугольный треугольник с прямым углом C и острым углом при вершине A, равным α (рис. 1).

Используем обычные обозначения: $c -$ гипотенуза AB; a и $b -$ катеты BC и AC *); a_c и $b_c -$ проекции BD и AD катетов на гипотенузу; $h -$ высота CD, опущенная на гипотенузу; $m_c -$ медиана CM, проведённая к гипотенузе; $R -$ радиус описанной окружности; $r -$ радиус вписанной окружности.

Напомним, что если $\alpha -$ величина острого угла A прямоугольного треугольника ABC (см. рис. 1), то

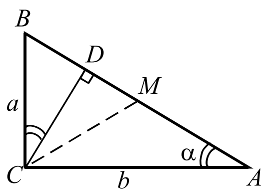


Рис. 1

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \cos\alpha = \frac{b}{c} \text{ и } \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}.$$

Значения синуса, косинуса и тангенса острого угла прямоугольного треугольника зависят только от меры угла и не зависят от размеров и расположения треугольника.

Теорема Пифагора. В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов: $\boxed{c^2 = a^2 + b^2.}$

Доказательство теоремы повторите по учебнику.

Выведем ряд соотношений между элементами прямоугольного треугольника.

1°. Квадрат катета равен произведению гипотенузы и его проекции на гипотенузу: $\boxed{a^2 = c \cdot a_c;}$ $\boxed{b^2 = c \cdot b_c.}$

*) По гречески < kathetos – катет > означает отвес, поэтому такое изображение прямоугольного треугольника нам представляется естественным.

□ Если $\angle A=\alpha$ (см. рис. 1), то $\angle CBD=90°-\alpha$ и $\angle BCD=\alpha$. Из треугольника ABC $\sin\alpha=\frac{BC}{AB}$, а из треугольника BCD $\sin\alpha=\frac{BD}{BC}$.

Значит $\frac{BC}{AB}=\frac{BD}{BC}$, откуда $BC^2=AB\cdot BD$, т. е. $a^2=c\cdot a_c$. Аналогично доказывается второе равенство. ■

2°. Квадрат высоты, опущенной на гипотенузу, равен произведению проекции катетов на гипотенузу: $\boxed{h^2=a_c\cdot b_c.}$

□ Из треугольника ACD (рис. 1) имеем: $\operatorname{tg}\alpha=\frac{CD}{AD}$, а из треугольника BCD $\operatorname{tg}\alpha=\frac{BD}{CD}$. Значит $\frac{BD}{CD}=\frac{CD}{AD}$, откуда $CD^2=AD\cdot BD$, т. е. $h^2=a_c\cdot b_c$. ■

3°. Произведение катетов равно произведению гипотенузы и высоты, опущенной на гипотенузу: $\boxed{a\cdot b=c\cdot h.}$

□ Из треугольника ABC имеем $\sin\alpha=\frac{BC}{AB}$, а из треугольника ACD $\sin\alpha=\frac{CD}{AC}$. Таким образом, $\frac{BC}{AB}=\frac{CD}{AC}$, откуда $BC\cdot AC=AB\cdot CD$, т. е. $a\cdot b=c\cdot h.$ ■

4°. Медиана, проведённая к гипотенузе, равна половине гипотенузы, т. е. $\boxed{m_c=\frac{1}{2}c.}$

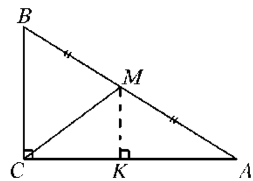


Рис. 2

□ Пусть $AM=BM$. Проведём $MK\parallel BC$ (рис. 2), тогда по теореме Фалеса $AK=CK$.

Кроме того, из того, что $BC\perp AC$ и $MK\parallel BC$ следует $MK\perp AC$. В прямоугольных треугольниках CMK и AMK катет MK общий, катеты CK и AK равны. Эти треугольники равны и $CM=AM$, т. е.

$$CM=\frac{1}{2}AB. \blacksquare$$

Полезно также запомнить, что <u>медиана к гипотенузе разбивает треугольник на два равнобедренных треугольника.</u>

5°. Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен половине гипотенузы $\boxed{R = m_c = \frac{1}{2}c.}$

□ Это следует из 4°, действительно, $MA = MB = MC$, следовательно, окружность с центром в точке M и радиуса $\frac{c}{2}$ проходит через три вершины. ■

6°. Сумма катетов равна удвоенной сумме радиусов описанной и вписанной окружностей.

$$\boxed{a+b=2(R+r)} \quad \text{или} \quad \boxed{a+b=c+2r.}$$

□ Пусть O – центр вписанной окружности и F, N и S – точки касания сторон треугольника ABC (рис. 3), тогда $OF \perp BC$, $ON \perp AC$, $OS \perp AB$ и $OF = ON = OS = r$. Далее, $OFCN$ – квадрат со стороной r, поэтому $BF = BC - FC$, $AN = AC - CN$, т. е. $BF = a - r$ и $AN = b - r$. Прямоугольные треугольники AON и AOS равны (гипотенуза AO – общая, катеты ON и OS равны), следовательно, $AS = AN$, т. е. $AS = b - r$. Аналогично доказывается, что $BS = a - r$, поэтому из $AB = AS + BS$ следует $c = (b-r) + (a-r)$, т. е. $a + b = c + 2r$. Зная, что $c = 2R$, окончательно получаем $a + b = 2(R + r)$. ■

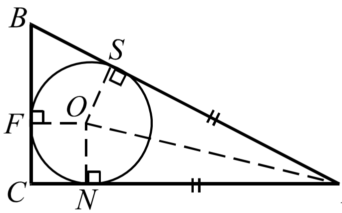


Рис. 3

Замечание. Равенства, доказанные в 1 и 2, записываются также так: $a = \sqrt{c \cdot a_c}$, $b = \sqrt{c \cdot b_c}$, $h = \sqrt{a_c \cdot b_c}$ и, соответственно, формулируются утверждения: катет есть среднее пропорциональное между гипотенузой и его проекцией на гипотенузу;

высота, опущенная на гипотенузу, есть среднее пропорциональное между проекциями катетов на гипотенузу.

Приведём примеры применения доказанных метрических соотношений в прямоугольном треугольнике.

Пример 1. Проекции катетов прямоугольного треугольника на гипотенузу равны 9 и 16. Найти радиус вписанной окружности.

△ 1. Пусть $a_c = 9, b_c = 16$ (рис. 4), тогда $c = a_c + b_c = 25.$

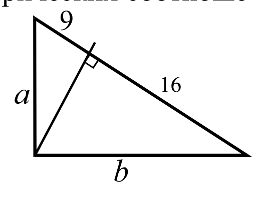


Рис. 4

2. По свойству 1°: $a=\sqrt{c\cdot a_c}=15$, $b=\sqrt{c\cdot b_c}=20$.

3. По свойству 6°: находим радиус

$$r=\frac{1}{2}(a+b-c)=5.\ \blacktriangle$$

Пример 2. В прямоугольном треугольнике из вершины прямого угла проведены медиана и высота (рис. 5), расстояние между их основаниями равно 1. Найти катеты, если известно, что один из них в два раза больше другого.

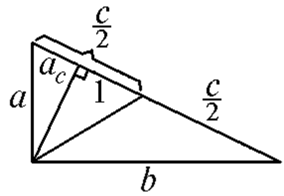


Рис. 5

$\triangle$ 1. Заметим, что $a_c=\frac{c}{2}-1$, а $b_c=\frac{c}{2}+1$ (рис. 5), откуда $a^2=c\cdot a_c=c\left(\frac{c}{2}-1\right)$ и

$$b^2=c\cdot b_c=c\left(\frac{c}{2}+1\right).$$

2. По условию $b=2a$, значит $b^2=4a^2$, т. е. $c\left(\frac{c}{2}+1\right)=4c\left(\frac{c}{2}-1\right)$.

Находим $c=\frac{10}{3}$, $a=\sqrt{c\left(\frac{c}{2}-1\right)}=\frac{2}{3}\sqrt{5}$ и $b=2a=\frac{4}{3}\sqrt{5}$. $\blacktriangle$

§ 2. Замечательные точки треугольника

Первые две теоремы Вам хорошо известны, две другие – докажем.

Теорема 1. **Три биссектрисы треугольника** пересекаются в одной точке, которая есть **центр вписанной окружности**.

Доказательство основано на том факте, что биссектриса угла есть геометрическое место точек, равноудалённых от сторон угла.

Теорема 2. **Три серединных перпендикуляра** к сторонам треугольника пересекаются в одной точке, которая есть **центр описанной окружности**.

Доказательство основано на том, что серединный перпендикуляр отрезка есть геометрическое место точек, равноудалённых от концов это го отрезка.

Теорема 3. **Три высоты или три прямые**, на которых лежат высоты треугольника, пересекаются в одной точке. Эта точка называется **ортоцентром** треугольника.

□ Через вершины треугольника ABC проведём прямые, параллельные противолежащим сторонам (рис. 6). В пересечении образуется треугольник $A_1B_1C_1$

По построению ABA_1C – параллелограмм, поэтому $BA_1 = AC$. Аналогично устанавливается, что $C_1B = AC$, следовательно $C_1B = BA_1$, точка B – середина отрезка C_1A_1.

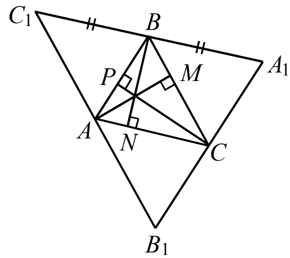


РИС. 6

Совершенно так же показывается, что C – середина B_1A_1 и A – середина B_1C_1.

Пусть BN – высота треугольника ABC, тогда для отрезка A_1C_1 прямая BN – серединный перпендикуляр. Откуда следует, что три прямые, на которых лежат высоты треугольника ABC, являются серединными перпендикулярами трёх сторон треугольника $A_1B_1C_1$; а такие перпендикуляры пересекаются в одной точке (теорема 2).

Если треугольник остроугольный, то каждая из высот есть отрезок, соединяющий вершину и некоторую точку противолежащей стороны. В этом случае (см. рис. 6) точки B и N лежат в разных полуплоскостях, образуемых прямой AM, значит отрезок BN пересекает прямую AM, точка пересечения лежит на высоте BN, т. е. лежит внутри треугольника.

В прямоугольном треугольнике точка пересечения высот есть вершина прямого угла. ■

Теорема 4. Три медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся точкой пересечении в отношении 2:1, считая от вершины. Эта точка называется центром тяжести (или центром масс) треугольника.

Есть различные доказательства этой теоремы. Приведём то, которое основано на теореме Фалеса.

□ Пусть E, D и F – середины сторон AB, BC и AC треугольника ABC (рис. 7а). Проведём медиану AD и через точки E и F **параллельные** ей прямые EK и FL. По теореме Фалеса $BK = KD$ $\left(\angle ABC, EK \| AD\right)$ и $DL = LC$ $\left(\angle ACB, AD \| FL\right)$. Но $BD = DC = {}^{a}\!/_{2}$, поэтому $BK = KD = DL = LC = {}^{a}\!/_{4}$. По той же теореме $BN = NM = MF$ $\left(\angle FBC, NK \| MD \| FL\right)$, поэтому $BM = 2MF$.

Это означает, что медиана BF в точке M пересечения с медианой AD разделились в отношении 2:1, считая от вершины.

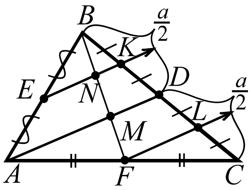


Рис. 7 а)

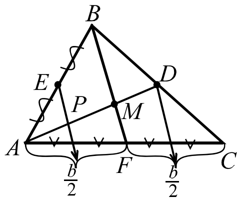


Рис. 7 б)

Докажем, что и медиана AD в точке M разделилась в том же отношении. Рассуждения аналогичны, иллюстрация на рисунке 7 б).

Если рассмотреть медианы BF и CE, то также можно показать, что они пересекаются в той точке, в которой медиана BF делится в отношении 2:1, т. е. в той же точке M. И этой точкой медиана CE также разделится в отношении 2:1, считая от вершины. ■

Пример 3. Две стороны треугольника равны соответственно 6 и 8. Медианы, проведённые к этим сторонам, пересекаются под прямым углом. Найти третью сторону треугольника.

△ 1. Пусть $AC = 6, BC = 8$ и медианы AN и BM пересекаются в точке O и перпендикулярны (рис. 8). Положим $AN = n$ и $BM = m$. Из доказанной теоремы следует, что $AO = \frac{2}{3}n$ и $BO = \frac{2}{3}m.$

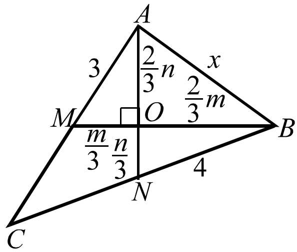


РИС. 8

2. Медианы перпендикулярны, поэтому треугольники AOM и BON прямоугольные. Применим теорему Пифагора (ещё учтём, что $AM = \frac{1}{2}AC = 3$ и $CN = \frac{1}{2}BC = 4$), получим:

$$\begin{cases} 16 = \frac{4}{9}m^2 + \frac{1}{9}n^2, \\ 9 = \frac{1}{9}m^2 + \frac{4}{9}n^2. \end{cases}$$

Сложив эти равенства, найдём, что $m^2 + n^2 = 45.$

3. Длина стороны AB находится из прямоугольного треугольника AOB: $x^2 = \frac{4}{9}m^2 + \frac{4}{9}n^2 = \frac{4}{9}(m^2 + n^2) = 20$. Итак, $AB = 2\sqrt{5}$. ▲

Свойства высот и биссектрис будут далее рассмотрены в §3.

§ 3. Подобие треугольников

Две фигуры F и F' называются подобными, если они переводятся друг в друга преобразованием подобия, т. е. таким преобразованием, при котором расстояния между точками изменяются (увеличиваются или уменьшаются) в одно и то же число раз. Если фигуры F и F' подобны, то пишется $F \sim F'$. Напомним, что запись подобия треугольников $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ означает, что *вершины, совмещаемые преобразованием подобия, стоят на соответствующих местах*, т. е. A переходит в A_1, B – в B_1, C – в C_1.

Из свойств преобразования подобия следует, что у **подобных фигур соответствующие углы равны, а соответствующие отрезки пропорциональны.** В частности, если $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$, то $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $A_1B_1 : AB = B_1C_1 : BC = C_1A_1 : CA.$

Признаки подобия треугольников

Два треугольника подобны, если:

1) два угла одного соответственно равны двум углам другого;

2) две стороны одного пропорциональны двум сторонам другого и углы, образованные этими сторонами, равны;

3) три стороны одного треугольника пропорциональны трём сторонам другого.

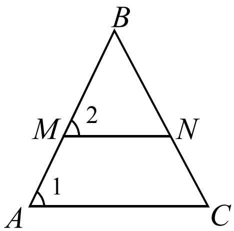


Рис. 9

В решении задач и доказательстве теорем часто используется утверждение, которое, чтобы не повторять каждый раз, докажем сейчас отдельно.

Лемма. Если две стороны треугольника пересекает прямая, параллельная третьей стороне (рис. 9), то она отсекает треугольник, подобный данному.

□ Действительно, из параллельности MN и AC следует, что углы 1 и 2 равны. Треугольники ABC и MBN имеют два равных угла: общий угол при вершине B и равные углы 1 и 2. По первому признаку эти треугольники подобны. ■

И сразу применим это утверждение в следующем примере, в котором устанавливается важное свойство трапеции.

Пример 4 (важное свойство трапеции). Прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей трапеции параллельно её основаниям, пересекает боковые стороны трапеции в точках M и N. Найти длину отрезка MN, если основания трапеции равны a и b.

$\triangle$ 1. Пусть $O-$ точка пересечения диагоналей, $AD=a, BC=b.$ Прямая MN параллельна основанию AD (рис. 10а), следовательно, $MO \| AD,$ треугольники BMO и BAD подобны, поэтому

$$\frac{MO}{AD}=\frac{BO}{BD}. \tag{1}$$

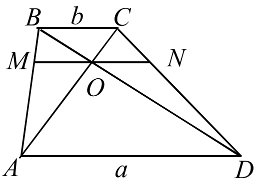


Рис. 10 а)

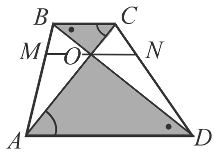


Рис. 10 б)

2. $AD \| BC$, $\Delta AOD \backsim \Delta COB$ по двум углам (рис. 10б):

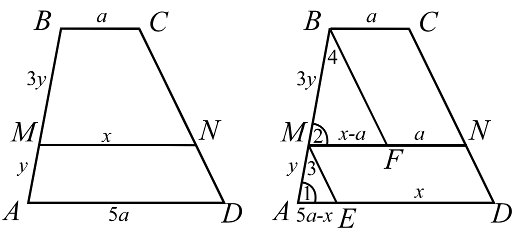
$$\frac{OD}{OB}=\frac{AD}{BC}, \text{ то есть } \frac{OD}{OB}=\frac{a}{b}.$$

3. Учитывая, что $BD=BO+OD$ находим отношение

$$\frac{BO}{BD}=\frac{BO}{BO+OD}=\frac{1}{1+OD/BO}=\frac{b}{a+b}.$$

Подставляя это в (1), получаем $MO=\dfrac{ab}{a+b}$; аналогично устанавливаем, что $ON=\dfrac{ab}{a+b}$, таким образом $MN=\dfrac{2ab}{a+b}$. ▲

Пример 5. (полезный метод решения) Точки M и N лежат на боковых сторонах AB и CD трапеции $ABCD$ и $MN \| AD$ (рис. 11а). Найти длину MN, если $BC=a$, $AD=5a$, $AM:MB=1:3$.



а) **б)**

Рис. 11

Δ 1. Пусть $BF \| CD$ и $ME \| CD$ (рис. 11б), тогда $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3=\angle 4$ (как соответствующие углы при пересечении двух параллельных прямых третьей) и $\Delta AME \sim \Delta MBF$.

Из подобия следует $\dfrac{AE}{MF}=\dfrac{AM}{MB}=\dfrac{1}{3}.$

2. Обозначим $MN = x$. По построению $BCNF$ и $MNDE-$ параллелограммы, $FN = a$, $ED = x$ и, значит, $MF = x-a$; $AE = 5a-x$. Итак, имеем $\dfrac{5a-x}{x-a}=\dfrac{1}{3}$, откуда находим $x=4a$. ▲

Напомним, что отношение периметров подобных треугольников равно отношению их сходственных сторон. Верно также следующее утверждение: отношение медиан, биссектрис и высот, проведённых к сходственным сторонам в подобных треугольниках, равно отношению сходственных сторон. Отношение радиусов вписанных окружностей, как и отношение радиусов описанных окружностей, в подобных треугольниках также равно отношению сходственных сторон.

Попытайтесь доказать это самостоятельно.

Признаки подобия прямоугольных треугольников

Прямоугольные треугольники подобны, если:

1) они имеют по равному острому углу;

2) катеты одного треугольника пропорциональны катетам другого;

3) гипотенуза и катет одного треугольника пропорциональны гипотенузе и катету другого.

Два первых признака следуют из первого и второго признаков подобия треугольников, поскольку прямые углы равны. Третий признак следует, например, из второго признака подобия и теоремы Пифагора.

Заметим, что высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, разбивает его на два прямоугольных треугольника, подобных между собой и подобных данному. Доказанные в § 1 метрические соотношения 1°, 2°, 3° можно доказать, используя подобие указанных треугольников.

Свойства высот и биссектрис

Пример 6. (Первая лемма о высотах).

<u>Если в треугольнике ABC нет прямого угла, AA_1 и BB_1- его высоты, то $\Delta A_1B_1C \backsim \Delta ABC$.</u> (этот факт можно сформулировать так: если соединить основания двух высот, то образуется треугольник, подобный данному).

□ Как всегда, полагаем $AB=c$, $BC=a$, $AC=b$.

а) Треугольник ABC остроугольный (рис. 12а).

В треугольнике AA_1C угол A_1 – прямой, $A_1C = AC\cos C = b\cos C$.

В треугольнике BB_1C **угол** B_1 – **прямой,** $B_1C = BC\cos C = a\cos C$.

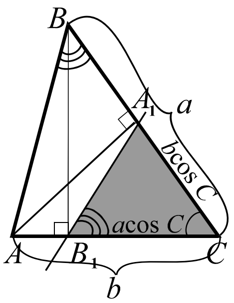


Рис. 12 а)

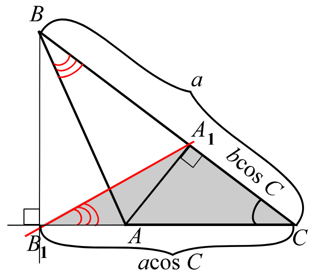


Рис. 12 б)

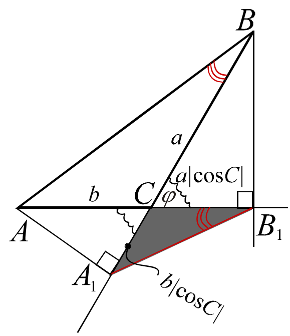


Рис. 12в

В треугольниках A_1B_1C и ABC угол C общий, прилежащие стороны пропорциональны: $\dfrac{A_1C}{AC} = \dfrac{B_1C}{BC} = \cos C$.

Таким образом, $\Delta A_1B_1C \backsim \Delta ABC$ с коэффициентом подобия $\cos C$. (Заметим, что $\angle A_1B_1C = \angle B$).

б) Треугольник ABC – тупоугольный, угол C – острый, высота AA_1 проведена из вершины тупого угла. Рассуждения аналогичны:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta AA_1C,\ \angle A_1 = 90^\circ \Rightarrow A_1C = AC\cdot\cos C = b\cos C; \\ \Delta BB_1C,\ \angle B_1 = 90^\circ \Rightarrow B_1C = BC\cdot\cos C = a\cos C, \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$\Delta A_1B_1C \backsim \Delta ABC$, коэффициент подобия $\cos C$, $\angle A_1B_1C = \angle B$.

Случай, когда угол B тупой, рассматривается аналогично.

в) Треугольник ABC – тупоугольный, угол C – тупой, высоты AA_1 и BB_1 проведены из вершин острых углов.

$\varphi = \angle BCB_1 = \angle ACA_1 = 180^\circ - \angle C$, $\cos\varphi = -\cos C = |\cos C|$.

$$\left.\begin{array}{l} \Delta AA_1C,\ \angle A_1 = 90^\circ \Rightarrow A_1C = AC\cdot\cos\varphi = b|\cos C|; \\ \Delta BB_1C,\ \angle B_1 = 90^\circ \Rightarrow B_1C = BC\cdot\cos\varphi = b|\cos C|, \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$\Delta A_1B_1C \backsim \Delta ABC$ с коэффициентом подобия $k = |\cos C|$,

$(\angle A_1B_1C = \angle B)$. ■

Пример 7. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1 (рис. 13). Треугольник, вершинами которого служат основания высот, называется «*высотным*» треугольником (или ортотреугольником). Доказать, что лучи A_1A, B_1B и C_1C являются биссектрисами углов высотного треугольника $A_1B_1C_1$ (т. е. высоты остроугольного треугольника являются биссектрисами ортотреугольника).

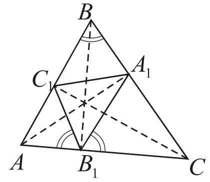


Рис. 13

$\triangle$ По первой лемме о высотах $\Delta A_1B_1C \sim \Delta ABC$, $\angle A_1B_1C = \angle B$. Аналогично $\Delta AB_1C_1 \sim \Delta ABC$, $\angle AB_1C_1 = \angle B$, т. е. $\angle A_1B_1C = \angle AB_1C_1$. Так как $BB_1 -$ высота, то

$$\angle AB_1B = \angle CB_1B = 90^\circ.$$

Поэтому $\angle C_1B_1B = \angle A_1B_1B = 90^\circ - \angle B$, т. е. луч $B_1B -$ биссектриса угла $A_1B_1C_1$. Аналогично доказывается, что $A_1A -$ биссектриса угла $B_1A_1C_1$ и $C_1C -$ биссектриса угла $B_1C_1A_1$. ▲

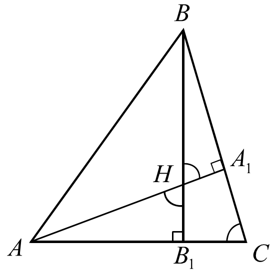


Рис. 14

Пример 8. (Вторая лемма о высотах)

Высоты AA_1, BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке H (рис. 14). Доказать, что имеет место равенство $AH \cdot HA_1 = BH \cdot HB_1$, т. е. произведение отрезков одной высоты равно произведению отрезков другой высоты.

$\triangle$ $\Delta AHB_1 \backsim \Delta BHA_1$, имеют по равному острому углу при вершине H (заметим, что этот угол равен углу C). Из подобия следует

$$\frac{AH}{BH} = \frac{HB_1}{HA_1},$$

откуда $AH \cdot HA_1 = BH \cdot HB_1$. ▲

Пример 9. Высоты AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке H, при этом $BH = HB_1$ и $AH = 2HA_1$ (рис. 15). Найти величину угла C.

Δ 1. По условию пересекаются высоты, поэтому треугольник остроугольный. Положим $BH = HB_1 = x$ и $HA_1 = y$, тогда $AH = 2y$. По второй лемме о высотах $AH \cdot HA_1 = BH \cdot HB_1$, т. е. $x^2 = 2y^2, x = y\sqrt{2}$.

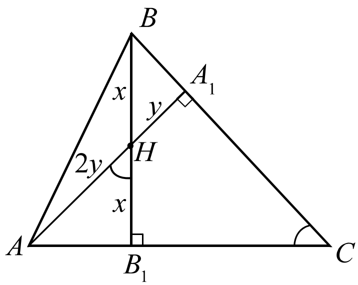


Рис. 15

2. В треугольнике AHB_1 угол AHB_1 равен углу C (т. к. угол A_1AC равен $90^\circ - C$), поэтому $\cos C = \cos\left(\angle AHB_1\right) = \dfrac{x}{2y} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Угол $C-$ острый, $\angle C = 45^\circ$.

Ответ: $\angle C = 45^\circ$. ▲

Установим ещё одно **свойство биссектрисы угла треугольника.**

Теорема 5. Биссектриса внутреннего угла треугольника делит противолежащую этому углу сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам, т. е. если $AD-$ биссектриса треугольника ABC, то $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$.

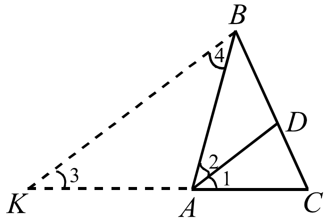


Рис. 16

□ Проведём через точку B прямую параллельно биссектрисе DA, пусть $K-$ её точка пересечения с прямой AC (рис. 16).

Параллельные прямые AD и KB пересечены прямой KC, образуются равные углы 1 и 3. Те же прямые пересечены и прямой AB, здесь равные углы 2 и 4. Но $AD-$ биссектриса, $\angle 1 = \angle 2$, следовательно $\angle 3 = \angle 4$. Отсюда следует, что треугольник KAB равнобедренный, $KA = AB$.

По теореме о пересечении сторон угла параллельными прямыми из $AD \parallel KB$ следует $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{KA}{AC}$. Подставляя сюда вместо KA равный ему отрезок AB, получим $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$. Теорема доказана. ■

Пример 10. Биссектриса треугольника делит одну из сторон треугольника на отрезки длиной 3 и 5. Найти в каких пределах может изменяться периметр треугольника.

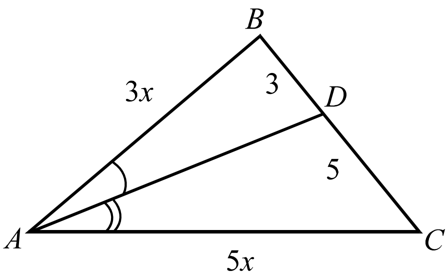


Рис. 17

△ Пусть $AD-$биссектриса и $BD = 3$, $DC = 5$ (рис. 17). По свойству биссектрисы $AB : AC = 3:5$.

Положим $AB = 3x$, тогда $AC = 5x$. Каждая сторона треугольника должна быть меньше суммы двух других сторон, т. е.

$$\underline{5x < 3x + 8}, \quad 3x < 5x + 8 \quad \text{и} \quad \underline{8 < 3x + 5x}.$$

Получаем ограничения $x < 4$ и $x > 1$. Периметр треугольника $P = 8 + 8x = 8(1 + x)$, поэтому $\underline{16 < P < 40}$. ▲

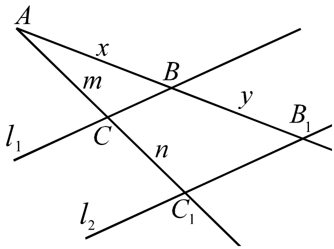
§ 4. Задачи о делении отрезка

Рассмотрим задачи, решения которых основаны на теореме о пересечении угла параллельными прямыми и подобии треугольников. Напомним теорему:

Теорема 6. <u>Параллельные прямые, пересекая стороны угла, отсекают на них пропорциональные отрезки,</u> т. е. если $l_1 \parallel l_2$,

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AC_1}{AB_1} = \frac{CC_1}{BB_1}$$

или $\dfrac{m}{x} = \dfrac{m+n}{x+y} = \dfrac{n}{y}$.



Пример 11. Точка N лежит на стороне AC треугольника ABC, причём $AN : NC = 2 : 3$. Найти, в каком отношении медиана AM делит отрезок BN.

Δ 1. Пусть $O -$ точка пересечения медианы AM и отрезка BN. Требуется найти отношение $BO : ON$. Обозначим $AN = 2x$, тогда $NC = 3x$. Отметим, что $BM = MC$ (рис. 18а).

Проведём прямую NK параллельно медиане AM (рис. 18б). Параллельные прямые AM и NK пересекают стороны угла MCA, следовательно, $\dfrac{MK}{KC} = \dfrac{2}{3}$.

Полагаем $\underline{MK = 2y}$, тогда $KC = 3y$, а т. к. $BM = MC$, то $\underline{BM = 5y}$.

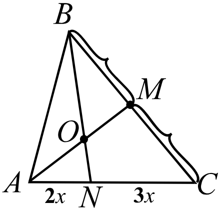


Рис. 18 а)

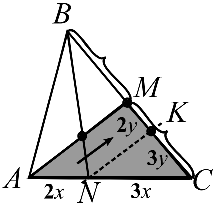


Рис. 18 б)

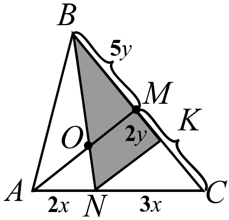


Рис. 18 в)

2. Те же прямые пересекают стороны угла NBC (см. рис. 18в), поэтому $\dfrac{BO}{ON}=\dfrac{BM}{MK}=\dfrac{5y}{2y}$, т. е. $\dfrac{BO}{ON}=\dfrac{5}{2}$ ▲

Пример 12. Точки D и F лежат на сторонах AB и BC треугольника ABC, при этом $AD:DB=1:2$ и $BF:FC=2:3$.
Прямая DF пересекает прямую AC в точке K. Найти отношение $AK:AC$.

Δ 1. Пусть $AD=x, BF=2y, KA=z$. Тогда $DB=2x$ и $FC=3y$.

Проводим прямую AE, параллельную стороне CB.

$\Delta ADE \backsim \Delta BDF \Big| \Rightarrow AE:BF=AD:BD \Rightarrow \underline{AE=y}.$

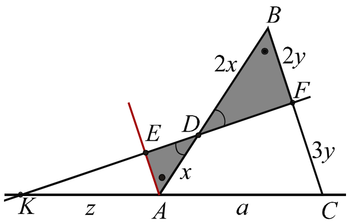


Рис. 19

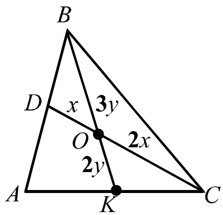


Рис. 20 а)

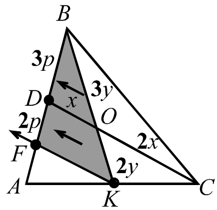


Рис. 20 б)

2. $\Delta KAE \backsim \Delta KCF \Big| \Rightarrow \dfrac{KA}{KC}=\dfrac{AE}{CF}$, т. е. $\dfrac{z}{a+z}=\dfrac{y}{3y}$. Находим $a=2z$.

Ответ: $AK:AC=1:2$. ▲

Пример 13. В треугольнике ABC точки D и K лежат соответственно на сторонах AB и AC, отрезки BK и CD пересекаются в точке O (рис. 20), при этом $BO:OK=3:2$ и $CO:OD=2:1$. Найти в каком отношении точка K делит сторону AC, т. е. $AK:KC$.

Δ 1. Полагаем $OD=x, OK=2y$, тогда $OC=2x$ и $BO=3y$.

Проводим прямую $KF \| CD$ (рис. 20б).

Из $KF \| OD$ $(\angle ABK)$ следует $BD:DF=3:2$. Обозначаем $DF=2p$, тогда $BD=3p$.

2. $\Delta FBK \backsim \Delta DBO$, $FK:DO=FB:DB$, откуда $FK=\dfrac{5p}{3p}\cdot x=\dfrac{5}{3}x$.

3. $\Delta AFK \backsim \Delta ADC$, $AF : AD = FK : DC$. Обозначаем $AF = z$, имеем $\dfrac{z}{z+2p} = \dfrac{\frac{5}{3}x}{3x}$, откуда $z = \dfrac{5}{2}p$, т. е. $AF = \dfrac{5}{2}p$.

4. Рассматриваем $\angle BAC$, $FK \parallel DC$, по теореме $AK : KC = AF : FP$, т. е. $AK : KC = 5 : 4$. ▲

Все три рассмотренные задачи могут быть решены с применением теоремы Менелая.

Теорема Менелая (о треугольнике и секущей).

Пусть точка A_1 лежит на стороне BC, точка C_1 – на стороне AB, а точка B_1 – на продолжении стороны AC за точку C.

Если точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой (рис. 21), то выполняется равенство

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1. \qquad (*)$$

Обратно, если выполняется равенство (*), то точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой. (Заметим, что можно считать B_1C_1 секущей треугольника ABC, а можно считать BC секущей треугольника AB_1C_1).

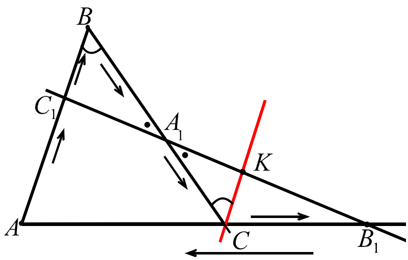


Рис. 21

□ а) Предположим, что точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой. Проведём $CK \parallel AB$ (рис. 21). $\Delta CKB_1 \backsim \Delta AC_1B_1$, поэтому $\dfrac{CK}{AC_1} = \dfrac{CB_1}{AB_1}$, откуда $CK = \dfrac{CB_1}{AB_1} \cdot AC_1$.

Далее: $\Delta CKA_1 \backsim \Delta BC_1A_1$, значит

$$\frac{CK}{BC_1} = \frac{CA_1}{BA_1}.$$

Подставляя сюда выражение для CK, получим $\dfrac{CB_1}{AB_1} \cdot \dfrac{AC_1}{BC_1} = \dfrac{CA_1}{BA_1}$, т. е.

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1, \text{ ч. т. д.}$$

б) Пусть выполнено равенство (1) для точек A_1, B_1 и C_1 (рис. 22), докажем, что эти точки лежат на одной прямой.

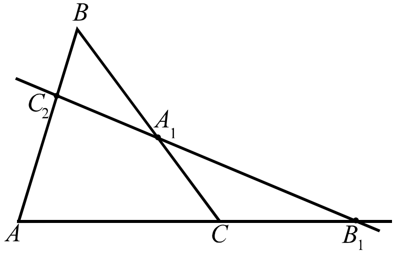


Рис. 22

Через <u>две точки</u> A_1 и B_1 проведём прямую, пусть C_2 – её точка пересечения с прямой AB (точка пересечения будет лежать на отрезке AB).

Три точки A_1, B_1 и C_2 лежат на одной прямой и по доказанному в пункте а) выполняется равенство

$$\frac{AC_2}{C_2B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$$

Сравнив это равенство с равенством (*), придём к выводу, что $\frac{AC_2}{C_2B}=\frac{AC_1}{C_1B}$. Точки C_2 и C_1 лежат на отрезке AB и делят его в одном отношении, считая от конца A. Следовательно, точка C_2 совпадает с точкой C_1, т. е. точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой.

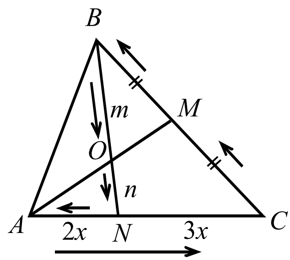


Рис. 23

Стрелки на рисунке 21 (*от точки* A) *показывают, как легко запомнить последовательность отрезков в пропорции* (*). ■

Например, применим теорему Менелая задаче из примера 12. Полагаем $BO=m,\ \ ON=n$ (см. рис. 23) и рассматриваем треугольник CBN и секущую AM.

Имеем: $\frac{CM}{BM}\cdot\frac{BO}{ON}\cdot\frac{NA}{AC}=1$, т. е. $\frac{1}{1}\cdot\frac{m}{n}\cdot\frac{2x}{5x}=1$, откуда $\frac{m}{n}=\frac{5}{2}$.

§ 5. Трапеция

1° Во всякой трапеции середины боковых сторон и середины диагоналей лежат на одной прямой.

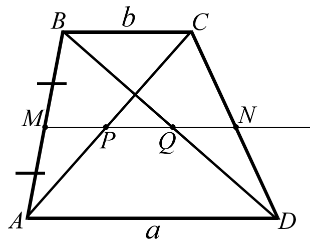


Рис. 24

□ Через точку M – середину стороны AB – проведём прямую, параллельную основанию (рис. 24). Докажем, что она разделит пополам обе диагонали и другую боковую сторону. В треугольнике BAC $MP \parallel BC$ и $AM = MB$. По теореме Фалеса $AP = PC$.

В треугольнике ABD точка $M-$ середина стороны, $MQ \parallel AD$. По теореме Фалеса $BQ = QD$. Наконец, в треугольнике BDC точка $Q-$ середина BD, $QN \parallel BC$. По теореме Фалеса $CN = ND$.

Итак, середины боковых сторон (точки M и N) и середины диагоналей (точки P и Q) лежат на одной прямой.

2° Средняя линия трапеции равна полусумме оснований; отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен полуразности оснований.

□ Пусть $AD = a, BC = b$. Из 1° следует, что $MQ-$ средняя линия треугольника ABD, поэтому $MQ = \frac{a}{2}$; MP и $QN-$ средние линии треугольников BAC и BDC, поэтому $MP = QN = \frac{b}{2}$. Отсюда следует, что $MN = \frac{a+b}{2}$ и $PQ = \frac{a-b}{2}$. ■

3° Во всякой трапеции середины оснований, точка пересечения диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон лежат на одной прямой.

□ Пусть продолжения боковых сторон пересекаются в точке K. Через точку K и точку O пересечения диагоналей проведём прямую KO (рис. 25).

Докажем, что эта прямая делит основания пополам.

Обозначим $BM = x, MC = y, AN = u, ND = v.$

Имеем:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta BKM \sim \Delta AKN \Rightarrow \dfrac{BM}{AN} = \dfrac{KM}{KN}; \\ \Delta MKC \sim \Delta NKD \Rightarrow \dfrac{MC}{ND} = \dfrac{KM}{KN} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{BM}{AN} = \frac{MC}{ND},$$

$$\text{т. е. } \frac{x}{u} = \frac{y}{v}.$$

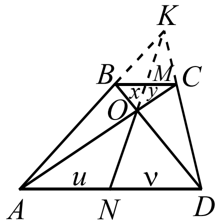


Рис. 25

Далее, $\Delta BMO \sim \Delta DNO \Rightarrow \dfrac{BM}{ND} = \dfrac{MO}{NO},$

$\Delta CMO \sim \Delta ANO \Rightarrow \dfrac{MC}{AN} = \dfrac{MO}{NO}$, поэтому $\dfrac{BM}{ND} = \dfrac{MC}{AN}$, т. е. $\dfrac{x}{v} = \dfrac{y}{u}$.

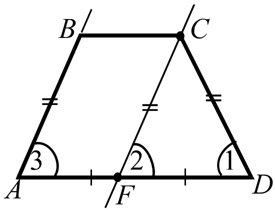


Рис. 26

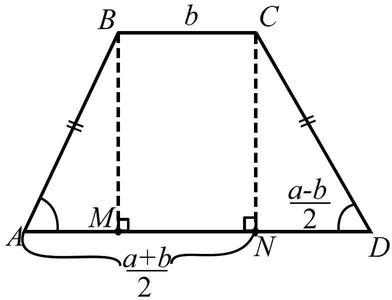


Рис. 27

Перемножим полученные равенства, получим $\dfrac{x^2}{uv} = \dfrac{y^2}{uv}$, откуда следует $x = y$, но тогда и $u = v$. ■

4° В равнобокой трапеции углы при основании равны.

□ Проведём $CF \| BA$ (рис. 26). $ABCF$ – параллелограмм, $CF = BA$, тогда треугольник FCD равнобедренный, $\angle 1 = \angle 2$. Но $\angle 2 = \angle 3$, следовательно, $\angle 1 = \angle 3$. ■

5° В равнобокой трапеции высота, опущенная из конца меньшего основания на большее основание, делит его на два отрезка, один из которых равен полусумме оснований, другой – полуразности оснований.

□ Если $BM \perp AD$ и $CN \perp AD$, то $\Delta BAM = \angle CDN$ (рис. 27).

$MBCN$ – прямоугольник, $MN = b$, тогда $ND = \dfrac{a-b}{2}$,

а $AN = a - \dfrac{a-b}{2} = \dfrac{a+b}{2}$. ■

6° В равнобокой трапеции прямая, проходящая через середины оснований, перпендикулярна основаниям и является осью симметрии трапеции.

□ Пусть K – точка пересечения продолжений боковых сторон трапеции (рис. 28). Как следует из свойства 2°, середины оснований – точки M и N – и

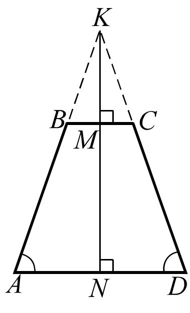


Рис. 28

точка K лежат на одной прямой, а как следует из свойства 4°, углы A и D равны. Таким образом, треугольник $AKD-$ равнобедренный, $KN-$ его медиана, она является и высотой. Итак, $MN \perp AD$.

Легко видеть, что при симметрии относительно прямой MN точки A и B переходят в точка D и C и наоборот. $MN-$ ось симметрии трапеции. ■

7° В равнобокой трапеции диагонали равны.

□ Рассмотрим треугольники ABD и DCA (рис. 29): $AB = DC$ (трапеция равнобокая), $AD-$общая сторона, $\angle BAD = \angle ADC$ (следует из свойства 4°). По первому признаку равенства эти треугольники равны и $BD = AC$. ■

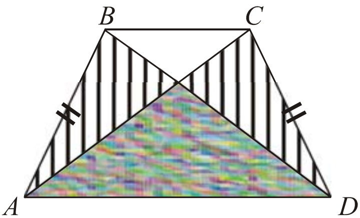


Рис. 29

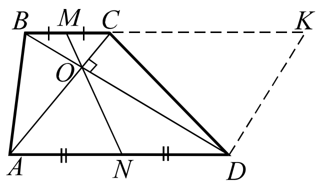


Рис. 30

Пример 14. Диагонали трапеции перпендикулярны, одна из них равна 6. Отрезок, соединяющий середины оснований, равен $4{,}5$ (рис. 30). Найти другую диагональ.

△ 1. Треугольник $AOD-$ прямоугольный, $ON-$ медиана, проведённая из вершины прямого угла, она равна половине гипотенузы, т. е.

$$ON = \frac{1}{2}AD.$$

Аналогично устанавливается, что $OM = \frac{1}{2}BC$. По свойству 3° точки M, O и N лежат на одной прямой. Таким образом, $MN = OM + ON = \frac{1}{2}(AD + BC)$, поэтому $AD + BC = 2MN = 9$.

2. Проведём через точку D прямую, параллельную диагонали AC, пусть $K-$ точка её пересечения с прямой BC. Угол BDK прямой, это угол между диагоналями трапеции. Кроме того, $ACKD$ по построению параллелограмм, $CK = AD$, значит, $BK = BC + AD = 9$.

Треугольник $BKD-$ прямоугольный, один из катетов (пусть DK) равен 6. По теореме Пифагора находим:

$$BD=\sqrt{BK^2-DK^2}=3\sqrt{5}. \blacktriangle$$

Пример 15. В равнобокой трапеции с периметром 10 и высотой 2 диагонали, пересекаясь, делятся в отношении $4:1$. Найти основания.

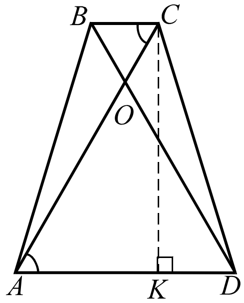


Рис. 31

$\triangle$1. Пусть $O-$точка пересечения диагоналей трапеции $ABCD$ (рис. 31) и $AO:OC=4:1$. Треугольники AOD и COB подобны, $AO:OC=AD:BC=4$, т. е. $AD=4BC$. Обозначим $BC=x$, тогда $AD=4x$.

2. Пусть $CK\perp AD$; $CK-$ высота трапеции, по условию $CK=2$, а как следует из свойства $5°$, $KD=\frac{1}{2}(AD-BC)=\frac{3}{2}x$. Из прямоугольного треугольника CKD имеем $CD=\sqrt{4+\frac{9}{4}x^2}$. Выражаем периметр трапеции: $10=\left(5x+2\sqrt{4+\frac{9}{4}x^2}\right)$. Решаем уравнение $2\sqrt{4+\frac{9}{4}x^2}=10-5x,$ оно имеет единственный корень $x=1$. Итак, $BC=1,\ AD=4.$ $\blacktriangle$

<u>Домашнее задание</u>

Прежде чем приступать к нему, ознакомьтесь с нашими пожеланиями и требованиями.

1. За краткий ответ «да», «нет», «не может быть» без пояснений (доказательство, опровергающий пример) ставится 0 очков. Примеры ответов приведены далее.

2. Если в контрольном вопросе сначала требуется сформулировать или доказать некоторую теорему, то ответ на сопутствующий вопрос надо постараться дать на основе этой теоремы.

3. Если в решении длина какого-либо отрезка выразится иррациональным числом (например, $a=\sqrt{5}$), то ни в дальнейших вычислениях, ни в ответе не следует заменять это точное значение на приближённое.

4. Если в решении использовались тригонометрические функции и получилось, например, $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, то не следует определять величину угла α по таблице или на калькуляторе приближённо и затем тем же способом находить значение $\cos\alpha, \sin 2\alpha, \sin\left(\alpha + 45^{\circ}\right)$ и т. п. Все значения других тригонометрических функций определяются только по формулам! Например, $\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\frac{1}{3},$ если угол α тупой и $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, а

$$\sin\left(\alpha + 45^{\circ}\right) = \sin\alpha\cdot\cos 45^{\circ} + \cos\alpha\cdot\sin 45^{\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sin\alpha + \cos\alpha\right).$$

5. Если в Задании контрольный вопрос сопровождается поясняющим рисунком, при ответе перенесите рисунок с теми же обозначениями в свою тетрадь, – это облегчит Вашему педагогу проверку работы.

6. Рисунок к задаче должен быть достаточно большим и ясным, чтобы на нём уместились все введённые Вами обозначения углов, отрезков и данные задачи (посмотрите на рис. 12 и рис. 15 Задания: как хороший рисунок и обозначения помогают увидеть простое решение).

7. Стремитесь к тому, чтобы Ваше решение было кратким, но обоснованным, и было ясным и понятным для проверяющего (работа проверяется без Вас, Вы не можете комментировать, что же имелось в виду). Для этого полезно решение разбивать на шаги: 1) … 2) … 3) … и то, что вычислено или выражено и важно для дальнейшего, выделять, например, так $\boxed{AD = {}^{3}\!/_{2}\,x,\ BC = 1}$.

Кроме того, вычисления разумно производить в кратких обозначениях (а математика – это здравый смысл), например

$$\left.\frac{x}{y} = \frac{u}{v}, \frac{x}{v} = \frac{y}{v}\right| \Rightarrow x = y \text{ и } u = v \text{ или } a = \sqrt{c\left(\frac{c}{2} - 1\right)},$$

а не $BC = \sqrt{AB\left(\frac{AB}{2} - MN\right)}$.

Примеры ответов на контрольные вопросы

Вопрос. Если в четырёхугольнике диагонали перпендикулярны, можно ли утверждать, что этот четырёхугольник – ромб?

Ответ. Нет, нельзя. Например, четырёхугольник на рис. 32, в котором $AC \perp BD$, $BO = OD$ и $AO = 3OC$ ромбом не является, т. к. $AB \neq BC$. Верным будет следующее утверждение: ели диагонали *параллелограмма* перпендикулярны, то этот параллелограмм – ромб.

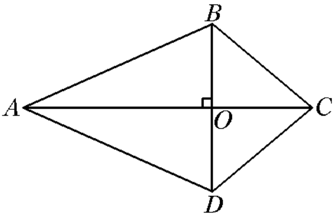


Рис. 32

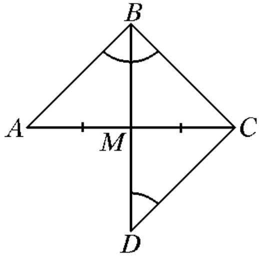


Рис. 33

Вопрос. Можно ли утверждать, что треугольник равнобедренный, если его биссектриса является медианой?

Ответ. Да, можно. Докажем это. Пусть в треугольнике ABC биссектриса BM является медианой: $AM = MC$ (рис. 33). На продолжении биссектрисы BM отложим отрезок MD, равный BM. Треугольники ABM и CDM равны по первому признаку: у них углы при вершине M равны, как вертикальные, и $AM = CM$, $BM = DM$.

Из равенства треугольников следует

$$CD = AB \tag{1}$$

и $\angle CDM = \angle ABM$. Но $\angle ABM = \angle CBM$, поэтому $\angle CDM = \angle CBM$, т. е. в треугольнике BCD углы при основании BD равны. По теореме этот треугольник равнобедренный: $BC = CD$. Отсюда и из (1) заключаем: $BC = AB$. Утверждение доказано.

Контрольные вопросы

1(2). В прямоугольном треугольнике проекции катетов на гипотенузу a_c и b_c известны. Выразите через них c, a, b и h (именно в таком порядке по формулам §1) и найдите их при $a_c = 4; b_c = 5$.

2(3). Сформулируйте теорему, обратную теореме Пифагора. Как доказать, что она верна, не используя теоремы косинусов?

3(4). а) По данным рисунка 34 найдите x и $\cos\alpha$.

б) По данным рисунка 35 найдите y и $\mathrm{tg}\alpha$.

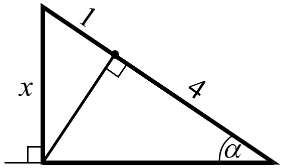


Рис. 34

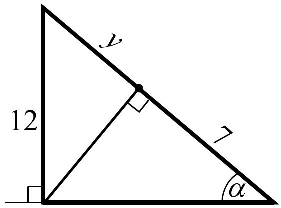


Рис. 35

4(3). а) Существует ли прямоугольный треугольник, в котором $a+b=17,\ r+R=9$?

б) Существует ли прямоугольный треугольник, в котором $c=\dfrac{25}{4}$ и $h_c=\pi$?

5(5). а) В каком отношении делится каждая медиана треугольника их общей точкой пересечения?

б) Как доказать, что $m_a+m_b+m_c>\dfrac{3}{4}(a+b+c)$?

в) Может ли быть $m_a=12, m_c=9, c=10$?

6(4). а) AA_1 и CC_1 – высоты треугольника ABC, $AC=10$, $A_1C_1=5\sqrt{2}$. Чему равен угол ABC? (Первая лемма о высотах)

б) Высоты AA_1 и BB_1 пересекаются в точке H, $BH:HB_1=3:2$, $AH=y,\ HA_1=ky$. При каком значении k угол $ACB=60°$? (Вторая лемма о высотах)

7(5). а) В каком отношении биссектриса угла треугольника делит противолежащую этому углу сторону?

б) $AD-$ биссектриса треугольника ABC, $BD:DC=5:4$.

1) В каком отношении биссектриса AD делит медиану BM?

2) В каком отношении медиана BM делит биссектрису AD?

8(4). а) В трапеции $ABCD$ углы при большем основании AD равны $35°$ и $55°$. Чему равен отрезок, соединяющий середины оснований, если $AD=7$ и $BC=3$?

б) Меньшее основание трапеции равно 3; отрезок с концами на боковых сторонах, параллельный основаниям и проходящий через точку пересечения диагоналей, равен 4. Чему равен отрезок, соединяющий середины диагоналей? (см. пример 4)

9(4). а) В трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = a, BC = b$ диагонали AC и BD перпендикулярны друг другу. Чему равен отрезок соединяющий середины оснований? Какое свойство трапеции Вы используете в ответе?

б) Отрезок MN параллелен основаниям трапеции $ABCD$ (рис. 36), $BC = 3$, $AD = 5$, $MN = 3{,}5$. Чему равно отношение $x : y$? (см. пример 5)

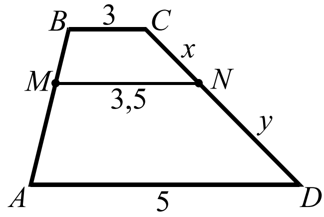


Рис. 36

10(5). а) Точка D лежит на стороне AB треугольника ABC, точка $K -$ на стороне BC, $AD : DB = 3 : 1$ и $BK : KC = 4 : 1$. Прямая DK пересекает прямую AC в точке F. Чему равно отношение $CF : AC$?

б) При таком же расположении точек на сторонах треугольника отрезки AK и CD пересекаются в точке O. Чему равны отношения $AO : OK$ и $DO : OC$?

Задачи

1(5). Окружность радиуса 2 вписана в прямоугольный треугольник ABC, в котором $\angle C = 90°$ и $BC = 5$. Найти расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей.

2(8). Треугольник ABC равнобедренный $AB = BC = 20,\ AC = 32$. Найти расстояние от вершины B до

1) точки M пересечения медиан;

2) точки O_1 пересечения биссектрис;

3) точки O пересечения серединных перпендикуляров сторон;

4) точки H пересечения высот.

3(5). Треугольник $ABC -$ равнобедренный, $AB = BC = 5, AC = 4$. Найти периметр ортотреугольника (см. пример 7).

4(5). В прямоугольном треугольнике $ABC\left(\angle C = 90°\right)$ проведены высота CH, биссектриса CK и медиана CM.

1) Доказать, что CK делит пополам угол между CH и CM.

2) При $HK = 1$ и $KM = 2$ найти: а) величину угла A; б) длину биссектрисы CK; в) $\operatorname{tg} A$.

5(5). В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основаниям и равна 6, а боковая сторона CD равна $\sqrt{61}$. Диагонали трапеции перпендикулярны друг другу. Найти основания трапеции.

6(6). В треугольнике ABC медиана BM перпендикулярна биссектрисе AD, $AB=4$, $BM=2\sqrt{7}$. Найти длины биссектрисы AD и стороны BC.

7(6). Через середину катета AC прямоугольного треугольника $ABC\left(\angle C=90^\circ\right)$ проведена прямая, пересекающая гипотенузу в точке D и продолжение катета BC в точке F. Известно, что $AD=2, CF=3$ и $\angle ABC=60^\circ$. Найти гипотенузу (два случая).

8(6). Медиана AM и биссектриса BD прямоугольного треугольника $ABC\left(\angle C=90^\circ\right)$ пересекаются в точке O, $BO=9$ и $OD=5$. Найти катеты и расстояние от точки O до гипотенузы AB.

9(6). Точка M – середина большего основания AD равнобокой трапеции $ABCD$. Точка K лежит на стороне AB, при этом $BK:KA=3:2$. Основания трапеции $AD=9$ и $BC=4$. Прямая CK перпендикулярна прямой BM. Найти высоту трапеции.

10(6). Биссектриса BD треугольника ABC делит сторону AC на отрезки $AD=1$ и $DC=2$. На прямой BD взята точка K (точка B лежит между точками K и D) так, что $BK=2$ и $\angle AKC=\frac{1}{2}\angle ABC$.

1) Найти стороны AB и BC.

2) Найти $\cos\left(\angle ABC\right)$.

11(4). Дан треугольник ABC. Биссектриса внешнего угла при вершине A пересекает прямую BC в точке K. Доказать, что $\frac{KB}{KC}=\frac{AB}{AC}$.