

**§9. Логарифмические неравенства. Неравенства вида**

$$\log_a f(x) > 0 \text{ и } \log_a f(x) > \log_a g(x)$$

Пусть  $f(x) > 0$ ,  $f(x)$  непрерывна на  $(c; d)$ , тогда  $\log_a f(x)$  тоже непрерывен на  $(c; d)$ , и для решения неравенства  $\log_a f(x) > 0$  применим метод интервалов. При решении этого неравенства значения  $f(x)$  в “пробных” точках придется сравнивать с единицей. Если “пробные” точки не очень удобные, то вычисления могут оказаться довольно громоздкими. Поэтому с самого начала учтем это.

**Рассмотрим неравенство**  $\log_a f(x) > 0 (< 0)$ , где  $a$  – заданное положительное число,  $a \neq 1$ .

ОДЗ:  $f(x) > 0$ .

Покажем, что имеет место условие равносильности

$$\boxed{\log_a f(x) > 0 (< 0) \Leftrightarrow (a-1)(f(x)-1) > 0 (< 0) \text{ в ОДЗ}} \quad (\text{УР Л4})$$

Действительно,

1. Если  $a > 1$ , то  $\log_a f(x) > 0 (< 0)$  тогда и только тогда, когда  $f(x) > 1 (< 1)$ , т. е.  $(a-1)(f(x)-1) > 0 (< 0)$ .

2. Если  $0 < a < 1$ , то  $\log_a f(x) > 0 (< 0)$  тогда и только тогда, когда  $f(x) < 1 (> 1)$ , т. е. опять  $(a-1)(f(x)-1) < 0 (> 0)$ . И, наоборот.

Если  $(a-1)(f(x)-1) > 0 (< 0)$ , то

1. при  $a > 1$  имеем  $f(x) > 1 (< 1)$ , а тогда  $\log_a f(x) > 0 (< 0)$ ,

2. при  $0 < a < 1$  имеем  $f(x) < 1 (> 1)$ , а тогда  $\log_a f(x) > 0 (< 0)$ .

Отсюда еще следует, что

$$\boxed{\text{знак } \log_a f(x) \text{ совпадает со знаком произведения } (a-1)(f(x)-1) \text{ в ОДЗ}} \quad (\text{УР Л5})$$

Можно записать полное условие равносильности, включающее ОДЗ:

$$\boxed{\log_a f(x) > 0 (< 0) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ (a-1)(f(x)-1) > 0 (< 0). \end{cases}} \quad (\text{УР Л5*})$$

Рассмотрим неравенство  $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ , где  $a > 0, a \neq 1$ .

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Аналогично доказывается, что верно и такое условие равносильности

$$\boxed{\log_a f(x) > (<) \log_a g(x) \Leftrightarrow \Leftrightarrow (a-1)(f(x)-g(x)) > 0 (< 0) \text{ в ОДЗ}} \quad (\text{УР Л6})$$

а также полное условие равносильности

$$\boxed{\log_a f(x) > (<) \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ (a-1)(f(x)-g(x)) > 0 (< 0). \end{cases}} \quad (\text{УР Л6*})$$

Отсюда следует, что

$$\boxed{\text{знак разности } \log_a f(x) - \log_a g(x) \text{ совпадает со знаком произведения } (a-1)(f(x)-g(x)) \text{ в ОДЗ}} \quad (\text{УР Л7})$$

При решении простейших логарифмических неравенств, конечно, можно не использовать (УР Л4) и (УР Л6). Однако, (УР Л4) и (УР Л6) дают возможность просто справиться с неравенствами, решение которых обычным способом потребует гораздо больше вычислений.

**Пример 19.** Решите неравенство

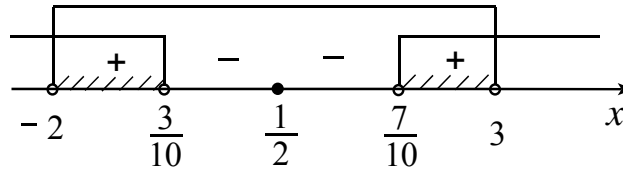
$$\frac{\lg(3x^2 - 3x + 7) - \lg(6 + x - x^2)}{(10x - 7)(10x - 3)} \geq 0.$$

$$\blacklozenge \text{ ОДЗ: } \begin{cases} 3x^2 - 3x + 7 > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}, \\ -x^2 + x + 6 > 0 \Leftrightarrow x \in (-2; 3). \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-2; 3).$$

$$\frac{\lg(3x^2 - 3x + 7) - \lg(-x^2 + x + 6)}{(10x - 7)(10x - 3)} \geq 0 \Leftrightarrow \text{ в ОДЗ, в силу (УР Л7),}$$

$$\frac{3x^2 - 3x + 7 + x^2 - x - 6}{\left(x - \frac{7}{10}\right)\left(x - \frac{3}{10}\right)} = \frac{(2x-1)^2}{\left(x - \frac{3}{10}\right)\left(x - \frac{7}{10}\right)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{3}{10}\right) \cup \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup \left(\frac{7}{10}; +\infty\right) \Rightarrow x \in \left(-2; \frac{3}{10}\right) \cup \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup \left(\frac{7}{10}; 3\right) \Rightarrow$$



**Ответ:**  $\left(-2; \frac{3}{10}\right) \cup \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup \left(\frac{7}{10}; 3\right)$ .

В этом примере разность логарифмов *не меняет* знак при переходе через точку  $x = \frac{1}{2}$ , а следующие нули находятся близко. “Пробные”

точки подставлять затруднительно. ♦

**Пример 20.** (МГУ, 1998, мех – мат.) Решите неравенство

$$\log_2\left(\sqrt{x + \frac{11}{2}} + \frac{x}{2} + 1\right) \cdot \log_3(-2x - x^2) \geq \log_3\left(\frac{|x|}{3} + \frac{3}{2}\right) \cdot \log_2(-2x - x^2)$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} x + 5,5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -5,5; \\ \sqrt{x + 5,5} + \frac{x + 2}{2} > 0, \\ -2x - x^2 > 0 \Leftrightarrow x(x + 2) < 0 \Leftrightarrow x \in (-2; 0). \end{array} \right. \Leftrightarrow x \in (-2; 0). \end{aligned}$$

$$\log_2\left(\sqrt{x + \frac{11}{2}} + \frac{x}{2} + 1\right) \log_3(-2x - x^2) \geq \log_3\left(\frac{|x|}{2} + \frac{3}{2}\right) \log_2(-2x - x^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(\sqrt{x + \frac{11}{2}} + \frac{x}{2} + 1\right) \log_2(-2x - x^2) \geq \log_2\left(\frac{|x|}{2} + \frac{3}{2}\right) \log_2(-2x - x^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2(-2x - x^2) \left( \log_2\left(\sqrt{x + \frac{11}{2}} + \frac{x}{2} + 1\right) - \log_2\left(\frac{|x|}{2} + \frac{3}{2}\right) \right) \geq 0 \Leftrightarrow$$

В ОДЗ, в силу (УР Л5) и (УР Л7),

$$(-2x - x^2 - 1) \left( \sqrt{x + \frac{11}{2}} + \frac{x}{2} + 1 - \frac{|x|}{2} - \frac{3}{2} \right) \geq 0 \Leftrightarrow$$

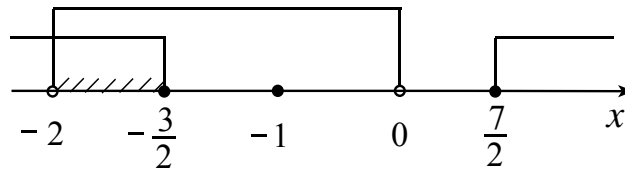
$$\Leftrightarrow (x+1)^2 \left( \sqrt{x + \frac{11}{2}} + x - \frac{1}{2} \right) \leq 0 \quad (|x| = -x \text{ в ОДЗ}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 \left( \sqrt{x + \frac{11}{2}} - \left( \frac{1}{2} - x \right) \right) \leq 0 \Leftrightarrow \text{Т. к. } \left( \frac{1}{2} - x \right) > 0 \text{ в ОДЗ}$$

$$(x+1)^2 \left( x + \frac{11}{2} - \left( \frac{1}{2} - x \right)^2 \right) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 \left( -x^2 + 2x + \frac{21}{4} \right) \leq 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 \left( x - \frac{7}{2} \right) \left( x + \frac{3}{2} \right) \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in \left( \left( -\infty; -\frac{3}{2} \right] \cup \left[ \frac{7}{2}; +\infty \right) \cup \{-1\} \right) \cap \text{ОДЗ. УчИтываем ОДЗ:}$$



Получаем

**Ответ:**  $\left( -2; -\frac{3}{2} \right] \cup \{-1\}$ . ♦

**Пример 21.** (МФТИ, 1992)  $\frac{1}{x} \log_7 \left( \frac{9}{2} - 2 \cdot 7^{-x} \right) > 1$ .

♦ ОДЗ:  $\frac{9}{2} - 2 \cdot 7^{-x} > 0 \Leftrightarrow \frac{9}{2} \cdot 7^x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > \log_7 \frac{4}{9}$ .

Тогда в ОДЗ  $\frac{1}{x} \log_7 \left( \frac{9}{2} - 2 \cdot 7^{-x} \right) > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} \log_7 \left( \frac{9}{2} - 2 \cdot 7^{-x} \right) > \frac{x}{x} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_7 \left( \frac{9}{2} - 2 \cdot 7^{-x} \right) - x}{x} \equiv \frac{\log_7 \left( \frac{9}{2} - 2 \cdot 7^{-x} \right) - \log_7 7^x}{x} > 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow$  В ОДЗ, в силу (УР Л7),

$$\frac{\frac{9}{2} - 2 \cdot 7^{-x} - 7^x}{x} > 0 \Leftrightarrow \frac{7^{2x} - \frac{9}{2} \cdot 7^x + 2}{x} < 0 \Leftrightarrow \frac{(7^x - 4) \left( 7^x - \frac{1}{2} \right)}{x} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(7^x - 7^{\log_7 4}) \left( 7^x - 7^{\log_7 \frac{1}{2}} \right)}{x} < 0 \Leftrightarrow \text{В силу (УР П2),}$$

$$\frac{(x - \log_7 4) \left( x - \log_7 \frac{1}{2} \right)}{x} < 0 \Leftrightarrow x \in \left( -\infty; \log_7 \frac{1}{2} \right) \cup (0; \log_7 4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{С учётом ОДЗ, } x \in \left( \log_7 \frac{4}{9}; \log_7 \frac{1}{2} \right) \cup (0; \log_7 4).$$

$$\text{Ответ: } \left( \log_7 \frac{4}{9}; \log_7 \frac{1}{2} \right) \cup (0; \log_7 4). \blacklozenge$$