§ 1. Линейные уравнения с двумя переменными

В первом задании мы рассмотрели линейные уравнения с одной переменной. Например, уравнения $2x+5=0,\ 3x+(8x-1)+9=0$ являются линейными уравнениями с переменной x. Уравнение, содержащее переменные x и y, называется уравнением с двумя переменными. Например, уравнения $2x-3y=5,\ \ x^2+xy-y^2=7$ являются уравнениями с двумя переменными.

Уравнение вида $ax+by=c$ называется линейным уравнением с двумя переменными, где x и $y-$ переменные, $a, b, c-$ некоторые числа.

Например, уравнения $2x+y=3, x-y=0$ являются линейными уравнениями с двумя переменными.

Решением уравнения с двумя переменными называется пара значений переменных, обращающая это уравнение в верное равенство.

Например $x=3,\ y=4$ является решением уравнения $2x+3y=18,$ будем эту пару чисел записывать так $(3;4)$. Очевидно, что пара чисел $(4;3)$ не является решением уравнения, т. к. $2\cdot 4+3\cdot 3=17\neq 18.$ При нахождении решений с двумя переменными на первом месте в паре чисел пишем значение для переменной $x,$ а на втором месте – значение переменной y.

Если каждое решение одного уравнения является решением второго уравнения и обратно, то данные уравнения называются равносильными. Например, решения уравнений $2x+y=3$ и $4x+2y=6$ совпадают, следовательно, эти уравнения равносильные.

Справедливы следующие правила при решении уравнений с двумя переменными:

1) если в уравнении перенести слагаемое из одной части в другую, изменив его знак, то получится уравнение, равносильное данному;
2) если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, то получим уравнение, равносильное данному.

Пример 1. Укажите три различных решения для уравнения

$$3x+y-2=0.$$

Δ Если $x=0,$ то $y=2;$ если $y=0,$ то $x=\dfrac{2}{3};$ если $x=1,$ то $y=-1.$

Таким образом, пары чисел $(0;2)$, $\left(\frac{2}{3};0\right)$, $(1;-1)$ являются решениями данного уравнения. Заметим, что данное уравнение имеет бесконечно много решений. Для заданного значения x значение $y=2-3x$, т. е. любая пара чисел $(x;\ 2-3x)$, где $x-$ любое число, является решением уравнения. ▲

Рассмотрим координатную плоскость Oxy и отметим на ней все точки $(x;y)$, для которых пара чисел x и y является решениями уравнения. Например, рассмотрим уравнение $y=2$. Этому уравнению удовлетворяют все пары чисел $(x;2)$. Точки, для которых $x-$ любое число, а $y=2$, лежат на прямой $y=2$. Эта прямая параллельна оси x и проходит через точку $(0;2)$ (см. рис. 1).

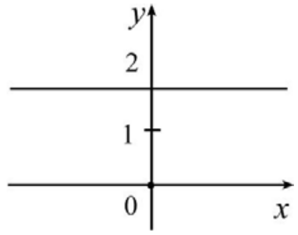

Рис. 1

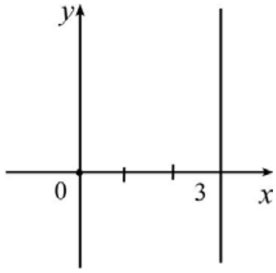

Рис. 2

Рассмотрим уравнение $x=3$. Каждая пара чисел, являющаяся решением данного уравнения, изображается точкой с координатами x и y на координатной плоскости Oxy. Решениями данного уравнения являются пары чисел $(3;y)$. Точки с координатами $x=3$ и y лежат на прямой $x=3$, эта прямая параллельна оси Oy и проходит через точку $(3;0)$ (см. рис. 2).

Графиком уравнения с двумя переменными называется множество всех точек координатной плоскости, координаты которых являются решениями данного уравнения.

На рис. 1 графиком уравнения является прямая $y=2$, на рис. 2 графиком уравнения является прямая $x=3$.

Рассмотрим теперь уравнение $2x+3y-1=0$. Выразим переменную y через x, получаем $y=\frac{1}{3}-\frac{2}{3}x$, это уравнение задаёт линейную функцию, и нам известно, что её графиком является прямая. Чтобы построить эту прямую, достаточно рассмотреть две точки, координаты которых удовлетворяют уравнению, а затем через эти две точки провести прямую. При $x=0$ $y=\frac{1}{3}$ и при $x=\frac{1}{2}$, $y=0$. график данного уравнения приведён на рис. 3.

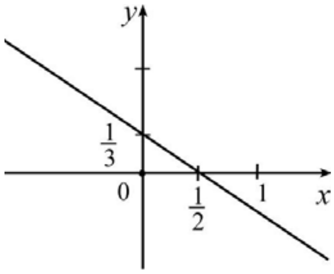

Рис. 3

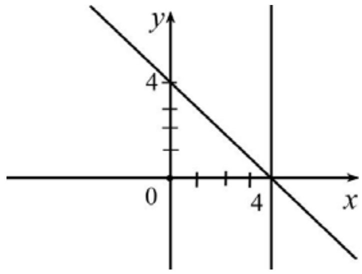

Рис. 4

Рассмотрим уравнение $(x-4)(x+y-4)=0$. Произведение двух скобок равно нулю, каждая скобка может равняться нулю. Наше уравнение распадётся на два уравнения: $x=4$ и $x+y-4=0$. Графиком первого уравнения является прямая, параллельная оси Oy и проходящая через точку $(4;0)$. Графиком второго уравнения является график линейной функции $y=4-x$, эта прямая проходит через точки $(4;0)$ и $(0;4)$. График данного уравнения приведён на рис. 4.

Пример 2. Постройте график уравнения $|x|+|y|=1$.

Δ Этот пример можно решать двумя способами. Пусть $x\geq 0$ и $y\geq 0$, точки с такими координатами лежат в первой четверти. Получаем уравнение $x+y=1$, так как $|x|=x$ и $|y|=y$. Графиком данного уравнения является прямая, проходящая через точки $A(0;1)$ и $B(1;0)$. Графику исходного уравнения принадлежат точки полученной прямой, лежащие в первой четверти, т. е. графику принадлежат точки отрезка AB, где $A(1;0)$ и $B(0;1)$.

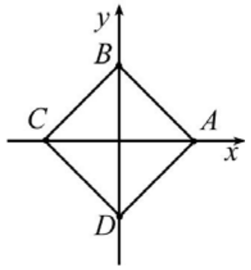

Рис. 5

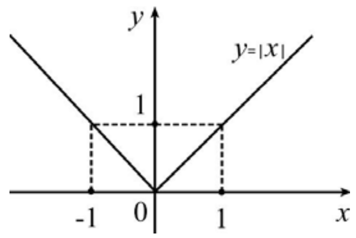

Рис. 6

Пусть теперь $x \le 0$ и $y \ge 0$, тогда получаем уравнение $-x + y = 1$, рассматриваем точки полученной прямой, лежащие во второй четверти. Это будет отрезок BC, где $C(-1;0)$. При $x \le 0$, $y \ge 0$ получим отрезок CD, где $D(0;-1)$ и при $x \ge 0$, $y < 0$ получим отрезок DA. Таким образом, график данного уравнения состоит из точек квадрата $ABCD$.

Этот пример можно решать другим способом. Пусть $y \ge 0$, тогда наше уравнение эквивалентно уравнению $y = 1 - |x|$. В первом задании мы строили график функции $y = |x|$. (см. рис. 6). График функции $y = -|x|$ получается зеркальным отражением относительно оси Ox графика функции $y = |x|$. (см. рис. 7).

График функции $y = 1 - |x|$ получается из графика функции $y = -|x|$

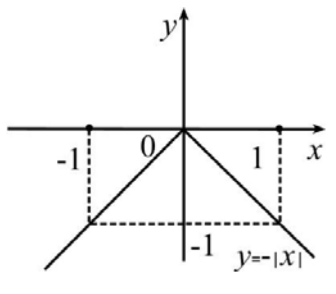

Рис. 7

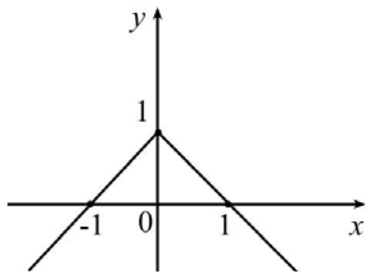

Рис. 8

сдвигом вдоль оси Oy на единицу вверх. (см. рис. 8).

И у полученного графика рассматриваем только точки для которых $y \geq 0.$ Получим ломаную ABC с рис. 5. Далее рассматриваем $y \leq 0,$ получим, что графиком уравнения при $y \leq 0$ является ломаная CDA с рис. 5. В итоге получим квадрат $ABCD$ с рис. 5. ▲

Пример 3. Найдите все решения уравнения $xy = 6,$ для которых x и y являются натуральными числами.

Δ Очевидно, что натуральные числа x и y являются делителями числа 6. Поэтому x и y могут принимать значения 1; 2; 3; 6. Следовательно, искомыми решениями являются числа (1;6), (2;3), (3;2), (6;1). ▲

Пример 4. Найти все решения уравнения $x^2 + 4x = y^2 + 2y + 8,$ для которых значения x и y являются целыми числами.

Δ Обычно такие примеры формулируют так: найти все решения данного уравнения в целых числах.

Преобразуем данное уравнение: $x^2 + 4x + 4 - 4 = y^2 + 2y + 1 + 7,$ $(x+2)^2 = (y+1)^2 + 11,$ $(x+2)^2 - (y+1)^2 = 11,$ $(x+2-y-1)\cdot(x+2+y+1) = 11.$ Если x и y целые числа, то выражения, стоящие в скобках, являются целыми числами. А это могут быть числа ± 1 и $\pm 11.$ Решаем 4 системы уравнений:

$$\begin{cases} x+2-y-1=1, \\ x+2+y+1=11; \end{cases} \quad \begin{cases} x+2-y-1=11, \\ x+2+y+1=1; \end{cases} \quad \begin{cases} x+2-y-1=-1, \\ x+2+y+1=-11; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2-y-1=-11, \\ x+2+y+1=-1. \end{cases}$$

Решая эти системы, получаем 4 решения: (4; 4), (4; – 6), (– 8; – 6), (– 8; 4).