Федеральное агентство по образованию
Федеральная заочная физико-техническая школа
при Московском физико – техническом институте
(государственном университете)

МАТЕМАТИКА

Тригонометрические уравнения, системы, неравенства

Задание №3 для 11-х классов

(2008-2009 учебный год)

г. Долгопрудный, 2008

Составитель: Ф.О. Сергеев, старший преподаватель кафедры высшей математики МФТИ.

Математика: задание №3 для 11-х классов (2008-2009 учебный год). - М.: МФТИ, 2008, 32с.

Дата отправления заданий по физике и математике – 06 декабря 2008г.

Составитель:
Сергеев Фёдор Олегович
Изд. лиц. №040060 от 21.08.96г. Подписано 07.10.08
Формат 60x90 1/16. Бумага типографская. Печать офсетная. Усл. печ. л. 2,0
Уч.-изд. л. 1,77. Тираж 1700. Заказ №5-з.

Федеральная заочная физико-техническая школа
Московский физико-технический институт
(государственный университет)
«ФИЗТЕХ-ПОЛИГРАФ»

141700, Москов. обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
ЗФТШ при МФТИ, тел/факс (095) 408-5145 – **заочное отделение**
тел./факс (095) 485-4227 – **очно-заочное отделение**
тел.409-9583 – **очное отделение**

E.mail: zftsh@pop3.mipt.ru

Наш сайт: www.school.mipt.ru

§1. Простейшие тригонометрические уравнения

Напомним формулы для решения простейших тригонометрических уравнений:

$\cos x = a$; $x = \pm \arccos a + 2\pi n$ при $|a| \le 1$,   (1)

$\sin x = a$; $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$ при $|a| \le 1$,   (2)

$\operatorname{tg} x = a$; $x = \operatorname{arctg} a + \pi n$, $a \in R$,   (3)

$\operatorname{ctg} x = a$; $x = \operatorname{arcctg} a + \pi n$, $a \in R$,   (4)

где $n \in \mathbb{Z}$,, а область значений числа a определяется из свойств тригонометрических функций (в дальнейшем, если не сказано обратного, будем считать, что $n \in \mathbb{Z}$).

В ряде случаев для корней уравнения $\sin x = a$ $\left(|a| \le 1\right)$ удобнее использовать формулу

$$x = \left[\begin{array}{l} \arcsin a + 2\pi k, \\ \pi - \arcsin a + 2\pi k. \end{array}\right. \qquad (2')$$

Формулы (1)-(2) и $(2')$ верны при всех $|a| \le 1$. Для случаев $a = 0, \pm 1$, они имеют более простой вид, который полезно запомнить:

а) $\sin x = 0$, $x = \pi n$;   г) $\cos x = 0$, $x = \pi/2 + \pi n$;
б) $\sin x = 1$, $x = \pi/2 + 2\pi n$;   д) $\cos x = 1$, $x = 2\pi n$;
в) $\sin x = -1$, $x = -\pi/2 + 2\pi n$;   е) $\cos x = -1$, $x = \pi(2n + 1)$.

Замечание. **Не может быть** зачтено решение задачи, если, например, школьник (абитуриент), получив простейшее уравнение $\sin x = \frac{1}{3}$, пишет $x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{3} + \pi m -$ приведённая формула, даёт также и решения уравнения $\sin x = -\frac{1}{3} -$ убедитесь в этом самостоятельно. Также **не может быть зачтено** решение уравнения, если в ответе присутствует запись вида $x = (-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{5}}{2} + \pi n$, т.к. $\frac{\sqrt{5}}{2} > 1$.

Все тригонометрические уравнения и системы с помощью преобразований сводятся, как правило, к решению одного или нескольких простейших уравнений.

Пример 1. Решить уравнения

а) $2\sin\left(x^2+2\right)=1;$ б) $\cos^2 3x = \sin^2 3x;$

в) $\cos x - 3\sin\frac{x}{2} = 1,$ г) $2\sin x - 3\cos x = 0.$

Решение. а) Согласно формуле $(2')$ из уравнения $\sin\left(x^2+2\right)=\frac{1}{2}$ получаем $x^2+2=\left[\begin{array}{l}\frac{\pi}{6}+2\pi n,\\ \frac{5\pi}{6}+2\pi n,\end{array}\right.$ т.е. $x^2=\left[\begin{array}{l}\frac{\pi}{6}-2+2\pi n,\\ \frac{5\pi}{6}-2+2\pi n.\end{array}\right.$

Так как $x^2 \geq 0,$ то в первой строчке n может принимать только значения $n = 1, 2, \ldots$, а во второй $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Ответ: $x = \pm\sqrt{\frac{\pi}{6}-2+2\pi n}, n = 1, 2, \ldots$.

$x = \pm\sqrt{\frac{5\pi}{6}-2+2\pi n}, n = 0, 1, 2, \ldots$

б) Записываем уравнения в виде $\cos^2 3x - \sin^2 3x = 0.$

Имеем $\cos 6x = 0,$ $6x = \frac{\pi}{2} + \pi n.$

Ответ: $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{6}.$

в) Используем формулу $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ и приводим уравнение $\cos x - 3\cos\frac{x}{2} = 1$ к виду $2\cos^2\frac{x}{2} - 3\cos\frac{x}{2} - 2 = 0.$ Полагаем $\cos\frac{x}{2} = t.$

Квадратное уравнение $2t^2 - 3t - 2 = 0$ имеет корни $t = 2$ и $t = -\frac{1}{2}.$ Т.к.

$\left|\cos\frac{x}{2}\right| \le 1,$ то $\cos\frac{x}{2} = -\frac{1}{2},\quad \frac{x}{2} = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n.$

Ответ: $x = \pm\frac{4\pi}{3} + 4\pi n.$

г) Уравнение $2\sin x - 3\cos x = 0$ равносильно уравнению $\mathrm{tg}x = \frac{3}{2}.$

Ответ: $x = \mathrm{arctg}\frac{3}{2} + \pi n.$

Для решения тригонометрических уравнений необходимо хорошо знать основные тригонометрические формулы. Например, формула $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ должна держаться в памяти и в виде $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ и $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$. Также полезно помнить, что $\cos 2x = (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)$, а $1 + \sin 2x = (\cos x + \sin x)^2$, $1 - \sin 2x = (\cos x - \sin x)^2.$

Пример 2. Решить уравнение $2\frac{\cos 2x}{1 + \sin 2x} = 1.$

Решение. Запишем уравнение в виде

$$\frac{2(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)}{(\cos x + \sin x)^2} = 1,$$

оно равносильно уравнению $\frac{2(\cos x - \sin x)}{\cos x + \sin x} = 1$ и системе

$$\begin{cases} 2\cos x - 2\sin x = \cos x + \sin x, \\ \cos x + \sin x \ne 0. \end{cases}$$

получаем $\cos x = 3\sin x$ (второе уравнение выполнено), $\mathrm{tg}x = \frac{1}{3}, \quad x = \mathrm{arctg}\frac{1}{3} + \pi n.$

Ответ: $x = \mathrm{arctg}\frac{1}{3} + \pi n.$

Очень часто при упрощении тригонометрического выражения используется тригонометрическая единица $\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$

Пример 3. Решить уравнение $\sin^8 x + \cos^8 x - \cos^2 2x = 0.$

Решение. Так как

$$\sin^8 x + \cos^8 x = \left(\sin^4 x + \cos^4 x\right)^2 - 2\sin^4 x\cos^4 x =$$

$$= \left[\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) - 2\sin^2 x\cos^2 x\right] - \frac{1}{8}\sin^4 2x =$$

$$= \left[1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x\right]^2 - \frac{1}{8}\sin^4 2x = 1 - \sin^2 2x + \frac{1}{4}\sin^4 2x - \frac{1}{8}\sin^4 2x =$$

$$= \cos^2 2x + \frac{1}{8}\sin^4 2x,$$

то уравнение равносильно уравнению $\sin^4 2x = 0.$ Значит $\sin 2x = 0,\ 2x = \pi n.$

Ответ: $x = \frac{\pi n}{2}.$

§2. Уравнения, однородные относительно sin*x* и cos*x*, и сводящиеся к ним

Однородными относительно sin*x* и cos*x* называются уравнения вида

$$a_0 \sin^n x + a_1 \sin^{n-1} x\cos x + a_2 \sin^{n-2} x\cos^2 x + \ldots +$$
$$+ a_{n-1}\sin x\cos^{n-1} x + a_n \cos^n x = 0, \qquad (5)$$

где $a_0, a_1, ..., a_n$ – действительные числа. Сумма степеней синуса и косинуса в каждом слагаемом левой части уравнения одинакова и равна числу n, называемому показателем *однородности.*

Если $a_0 = 0$, то, очевидно, корни уравнения $\cos x = 0$ являются одними из корней исходного уравнения. Если же $a_0 \neq 0$, то $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ не являются корнями однородного уравнения, т.к. в этом случае $\sin x = \pm 1$ и $\cos x = 0$, что не удовлетворяет данному уравнению.

Итак, пусть $a_0 \neq 0$, тогда $\cos x \neq 0$ и обе части однородного уравнения можно разделить на $\cos^n x$, в результате чего получим уравнение:

$$a_0 \mathrm{tg}^n x + a_1 \mathrm{tg}^{n-1} x + a_2 \mathrm{tg}^{n-2} x + ... + a_{n-1} \mathrm{tg} x + a_n = 0, \qquad (6)$$

которое простой заменой $t = \mathrm{tg} x$ сводится к стандартному алгебраическому уравнению $a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + a_2 t^{n-2} + ... + a_{n-1} t + a_n = 0.$

Однородное уравнение первого порядка $a \sin x + b \cos x = 0$ решается сведением к $\mathrm{tg} x$: $\mathrm{tg} x = -\frac{b}{a}$ (см. пример 1г).

2.1. Однородные уравнения второго порядка и сводящиеся к ним

Пример 4. Решить уравнение $2\sin^2 x + 3\sin x \cos x + \cos^2 x = 0.$

Решение. Равносильное исходному уравнение $2\mathrm{tg}^2 x + 3\mathrm{tg} x + 1 = 0$ дает два действительных решения: $\mathrm{tg} x = -1, \mathrm{tg} x = -\frac{1}{2}.$

Отсюда находим две серии решений исходного уравнения.

Ответ: $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ x = -\mathrm{arctg}\frac{1}{2} + \pi n.$

Уравнения, не являющиеся на первый взгляд однородными и содержащие свободные члены (числа), могут быть сведены к однородным с помощью использования тригонометрической единицы

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$:

$$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d(\sin^2 x + \cos^2 x).$$

Пример 5. Решить уравнение $5\cos^2 x + 2\sin x\cos x = 4$.

Решение. Это уравнение равносильно уравнениям

$$5\cos^2 x + 2\sin x\cos x = 4(\sin^2 x + \cos^2 x),$$
$$4\sin^2 x - 2\sin x\cos x - \cos^2 x = 0,$$
$$4\mathrm{tg}^2 x - 2\mathrm{tg} x - 1 = 0.$$

Полагаем $\mathrm{tg} x = t$. Уравнение $4t^2 - 2t - 1 = 0$ имеет корни

$$t_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}, \quad t_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{4}.$$

Ответ: $x = \mathrm{arctg}\frac{1+\sqrt{5}}{4} + \pi n,$

$$x = \mathrm{arctg}\frac{1-\sqrt{5}}{4} + \pi n = -\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{5}-1}{4} + \pi n.$$

2.2. Решение однородных уравнений третьего порядка и сводящихся к ним

Пример 6. Решить уравнение $\sin^3 x + 13\cos^3 x - \cos x = 0$.

Решение. Для сведения данного уравнения к однородному воспользуемся тригонометрическим тождеством $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$:

$$\sin^3 x + 13\cos^3 x - (\sin^2 x + \cos^2 x)\cos x = 0,$$
$$\sin^3 x - \sin^2 x\cos x + 12\cos^3 x = 0.$$

Получившееся уравнение решается стандартным методом (заметим, что $\cos x = 0$ не удовлетворяет уравнению):

$$\mathrm{tg}^3 x - \mathrm{tg}^2 x + 12 = 0,$$
$$t^3 - t^2 + 12 = 0, \quad (t+2)(t^2 - t + 6) = 0.$$

полученное уравнение имеет только одно решение в действительных числах $t=-2,$ которое дает $x=-\operatorname{arctg}2+\pi n$.

Ответ: $x=-\operatorname{arctg}2+\pi n$.

§3. Методы решений некоторых уравнений

3.1. Уравнение вида $\sin kx \pm \cos mx = 0$

Также уравнения решаются сведением к одной функции, т.е. к виду

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-kx\right)\pm\cos mx=0$ или $\sin kx\pm\sin\left(\frac{\pi}{2}\pm mx\right)=0,$ и применением формул, преобразующих сумму (разность) косинусов или сумму (разность) синусов в произведение.

Пример 7. Решить уравнение $\cos 3x+\sin 5x=0.$

Решение. По формуле перехода $\sin 5x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-5x\right)$, уравнение примет вид $\cos 3x+\cos(\frac{\pi}{2}-5x)=0.$

По формуле $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ получаем

$$2\cos(\frac{\pi}{4}-x)\cos(4x-\frac{\pi}{4})=0,$$

$$\cos(\frac{\pi}{4}-x)=0,\quad x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad x=\frac{3\pi}{4}+\pi n$$

и $$\cos(4x-\frac{\pi}{4})=0,\quad 4x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad x=\frac{3\pi}{16}+\frac{\pi n}{4}.$$

Ответ: $x=\frac{3\pi}{4}+\pi n,\ x=\frac{3\pi}{16}+\frac{\pi n}{4}.$

3.2. Решение уравнений вида $F\left(\sin x+\cos x;\ \sin x\cdot\cos x\right)=0$

$$\text{и } \Phi\left(\sin x-\cos x;\ \sin x\cdot\cos x\right)=0$$

Оба уравнения сводятся к алгебраическим уравнениям заменой. Полагая $t=\sin x+\cos x$ из тождества

$$\left(\sin x+\cos x\right)^2=1+2\sin x\cdot\cos x$$

получаем $\sin x\cdot\cos x=\dfrac{t^2-1}{2}$, тогда первое уравнение запишется в виде $F\left(t;\dfrac{t^2-1}{2}\right)=0.$

Во втором уравнении делаем замену $y=\sin x-\cos x,$ тогда $\sin x\cos x=\dfrac{1-y^2}{2}$ и $\Phi\left(y,\dfrac{1-y^2}{2}\right)=0.$ Следует иметь в виду, что

$$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cdot\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right),\qquad \sin x-\cos x=\sqrt{2}\cdot\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right),$$

поэтому допустимые значения t и y таковы $|t|\le\sqrt{2}$ и $|y|\le\sqrt{2}.$

Пример 8. Решить уравнение $2\sin 2x-5\cos x-5\sin x+5=0.$

Решение. Заменой $t=\cos x+\sin x$ (тогда $\sin 2x=t^2-1$) приводится к виду $2t^2-5t+3=0,$ его корни $t_1=1,\quad t_2=\dfrac{3}{2}.$

Если $\cos x+\sin x=1,$ то $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}};$ то по формуле $(2')$

$$x+\frac{\pi}{4}=\left[\begin{array}{l}\dfrac{\pi}{4}+2\pi n,\\[2mm] \dfrac{3\pi}{4}+2\pi n,\end{array}\right.\qquad x=\left[\begin{array}{l}2\pi n,\\[2mm] \dfrac{\pi}{2}+2\pi n.\end{array}\right.$$

Уравнение $\cos x+\sin x=\dfrac{3}{2}$ не имеет решений, т.к.

$$\cos x + \sin x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right), \text{ а } \frac{3}{2\sqrt{2}} > 1.$$

Ответ: $x = 2\pi n$; $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n.$

3.3. Замена $t = \mathrm{tg}\,\dfrac{x}{2}$.

Через t несложно выражаются sin$x$ и cos$x$:

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - \mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Такая замена может быть применена, если, например, *левая часть тригонометрического уравнения* $F(x) = 0$ *выражается через* $\mathrm{tg}\,\dfrac{x}{2}$ *или является рациональной функцией от* sin$x$ *и* cos$x$, *т.е. представляется в виде* $\dfrac{P}{Q}$, *где P и Q – некоторые многочлены от* sin$x$ *и* cos$x$ (*например,* $\dfrac{\sin^2 x + 3\cos x}{\cos 3x + \sin 2x} = \dfrac{1}{2}$; cos3$x$ *и* sin2x *выражаются через* sin$x$ *и* cos$x$ *по известным формулам*).

Следует помнить, что функция tg$x$ определена только при cos$x \neq 0$, т.е. перед проведением замены $t = \mathrm{tg}\,\dfrac{x}{2}$ необходимо проверить, не являются ли значения $x = \pi(2n+1)$ (решения уравнения $\cos\dfrac{x}{2} = 0$) корнями исходного уравнения.

Пример 9. Решить уравнение $\sin x+\operatorname{ctg}\frac{x}{2}=2$.

Решение. Заметим, что $\cos\frac{x}{2}=0$ не удовлетворяет уравнению. Поэтому можно сделать замену $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. При этом $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\operatorname{ctg}\frac{x}{2}=\frac{1}{t}$. После замены, выполняя равносильные преобразования при $t\neq 0$, получаем:

$$\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1}{t}=2,$$
$$2t^2+1+t^2=2t^3+2t,$$
$$2t^3-3t^2+2t-1=0,$$
$$2(t^3-t^2)-(t^2-t)+(t-1)=0,$$
$$(t-1)(2t^2-t+1)=0.$$

Поскольку уравнение $2t^2-t+1=0$ не имеет действительных корней, то исходное уравнение сводится к уравнению $t=1$, или $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=1$, откуда

$x=\frac{\pi}{2}+2\pi n.$

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n.$

Использование замены $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ нередко приводит к трудной задаче нахождения корней многочлена. Поэтому использование данной замены целесообразно только в случае, когда нет других путей решения.

Часто, используя замену, учащиеся забывают, что требовалось-то найти x, а не t, и не указывают правильного ответа. Такая небольшая, казалось бы, ошибка может на вступительных экзаменах свести на нет всё решение.

3.4. Метод разложения на множители

Метод разложения на множители широко известен из других областей математики и фактически состоит в том, что громоздкое уравнение с помощью тождественных преобразований сводится к совокупности нескольких более простых уравнений вида $F(x) = 0$. Применение этого метода в тригонометрии удобнее всего рассмотреть на нескольких примерах.

Пример 10. Решить уравнение $2\sin x\cos 2x - 3 + 6\cos 2x - \sin x = 0$.

Решение. Вынося общий множитель первого и третьего слагаемых, получаем: $2\cos 2x(\sin x + 3) - (\sin x + 3) = 0$,

или $(2\cos 2x - 1)(\sin x + 3) = 0$.

Так как левая часть этого уравнения определена при всех x, то исходное уравнение распадается на следующие два:

$$\left[\begin{array}{l} 2\cos 2x - 1 = 0, \\ \sin x + 3 = 0. \end{array}\right.$$

Второе уравнение не имеет решений, а из первого уравнения следует

$$\cos 2x = \frac{1}{2},\ \ 2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n.$$

Ответ: $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + \pi n.$

Пример 11. Решить уравнение $\cos^3 x - \sin^3 x = \cos 2x$.

Решение. Исходное уравнение преобразуется к виду

$$(\cos x - \sin x)(\cos^2 x + \cos x\sin x + \sin^2 x) = \cos^2 x - \sin^2 x,$$

или $(\cos x - \sin x)\left[1 + \cos x\sin x - (\cos x + \sin x)\right] = 0$, и распадается

на два уравнения: $\left[\begin{array}{l} \cos x - \sin x = 0, \\ 1 - (\cos x + \sin x) + \cos x\sin x = 0. \end{array}\right.$

Первое уравнение имеет решение $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$. Второе заменой $\cos x+\sin x=t$, (при этом $\cos x\sin x=\frac{t^2-1}{2}$) (см. §3.2.) сводится к уравнению

$$1-t+\frac{t^2-1}{2}=0,$$
$$t^2-2t+1=0,$$
$$(t-1)^2=0,\ t=1.$$

Отсюда $\cos x-\sin x=1,\ \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}},$

$$x-\frac{\pi}{4}=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n,\quad x=\left[\begin{array}{l}2\pi n,\\ \frac{\pi}{2}+2\pi n.\end{array}\right.$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ x=2\pi n,\ x=\frac{\pi}{2}+2\pi n.$

Пример 12. Решить уравнение $\sin x\cos 5x=\sin 9x\cos 3x.$

Решение. Преобразуя произведение тригонометрических функций в сумму, запишем уравнение в виде

$$\frac{1}{2}(\sin 6x-\sin 4x)=\frac{1}{2}(\sin 12x+\sin 6x).$$

Отсюда получаем $\sin 12x+\sin 4x=0$, и, применяя формулу суммы синусов, получаем: $2\sin 8x\cos 4x=0,$ $\sin 8x=0,\ 8x=\pi n,$ либо $\cos 4x=0,$ $4x=\frac{\pi}{2}+\pi n.$ Обе серии корней можно объединить в одну

Ответ: $x=\frac{\pi n}{8}$.

Пример 13. Доказать, что уравнение $\sin 5x\sin 7x=1$ не имеет решений**.**

Доказательство. $2\sin 5x\sin 7x=2,$

$$\cos 2x - \cos 12x = 2$$

$$\begin{cases} \cos 2x = 1, \\ \cos 12x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2\pi k, \\ 12x = \pi + 2\pi m \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$12x = 12\pi k = \pi + 2\pi m,$$

$$12k \neq 1 + 2m. \quad x \in \varnothing.$$

3.5. Метод введения дополнительного аргумента

Метод введения вспомогательного аргумента уже использовался нами в виде $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. Также часто в школьных примерах используются тождества вида

$\sqrt{3}\sin x - \cos x = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ или $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

Теперь же разберём более общий случай.

Рассмотрим решение уравнений вида

$$a\cos x + b\sin x = c, \tag{5}$$

где *a,b,c* – действительные числа, причём $c \neq 0$ (иначе уравнение становится однородным и решается проще – см. пример 1*г*) и $a^2 + b^2 \neq 0$.

Разделив обе части (5) на $\sqrt{a^2+b^2}$, получаем:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Т.к. $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$, то существуют такие углы α и β, что $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\alpha,\ \ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\alpha$

или $\quad \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\beta,\ \ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\beta.$

Отсюда следует, что уравнение (5) можно переписать в другом виде

$$\sin\alpha\cos x+\sin x\cos\alpha=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\left(x+\alpha\right)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

или $\cos\beta\cdot\cos x+\sin\beta\cdot\sin x=\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\left(x-\beta\right)=\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Решение этих уравнений существует лишь при условии $\dfrac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}\le 1.$

В ответе нужно *не забыть* указать, что в качестве α можно взять угол $\alpha=\operatorname{arctg}\dfrac{a}{b}$ или $\alpha=\arccos\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и $\beta=\operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}$ или $\beta=\operatorname{arcos}\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Пример 14. Решить уравнение $3\sin x+4\cos x=5$.

Решение. Запишем уравнение в виде: $\dfrac{3}{5}\sin x+\dfrac{4}{5}\cos x=1$ и введём вспомогательный угол α : $\cos\alpha=\dfrac{3}{5},\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$.

Угол α, замечаем, лежит в первой четверти тригонометрического круга и равен $\arccos\dfrac{3}{5}$.

Получаем в итоге уравнение: $\sin(x+\alpha)=1$.

Ответ: $x=-\arccos\dfrac{3}{5}+\dfrac{\pi}{2}+\pi n.$

Пример 15. Решить уравнение $3\sin x-4\cos x=5\cos 19x.$

Решение. Приведём уравнение к виду $\dfrac{3}{5}\sin x-\dfrac{4}{5}\cos x=\cos 19x,$ сразу видно, что лучше преобразовать левую часть к функции косинус. Полагаем $\cos\beta = \frac{4}{5}$, $\sin\beta = \frac{3}{5}$ (берём $\beta = \arccos\frac{4}{5}$), получаем уравнение

$$\cos(x+\beta) + \cos 19x = 0.$$

Отсюда $2\cos\left(10x + \frac{\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(9x - \frac{\beta}{2}\right) = 0.$

$$10x + \frac{\beta}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad 9x - \frac{\beta}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n.$$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{20} - \frac{1}{20}\arccos\frac{4}{5} + \pi n, \quad x = \frac{\pi}{18} + \frac{1}{18}\arccos\frac{4}{5} + \pi n..$

3.6. Метод оценки

Случается, что предварительная оценка левой и правой частей уравнения помогает сразу решить уравнение или показать, что решений нет.

Пример 16. Решить уравнение $2\sin^5 17x + 3\cos^8 3x = 6$.

Решение. Так как $|\sin 17x| \le 1, |\cos 3x| \le 1$, то указанное равенство не выполняется ни при каком значении x. Таким образом, делаем вывод, что уравнение не имеет решений.

Ответ: $x \in \varnothing$

Пример 17. Решить уравнение $\sin^2 2x + 1 = \cos^2 3x$.

Решение. Уравнение преобразуется к виду $\sin^2 2x + \sin^2 3x = 0.$

Так как оба слагаемых неотрицательны, то равенство достигается только в случае их одновременного равенства нулю: $\begin{cases} \sin 2x = 0, \\ \sin 3x = 0. \end{cases}$

Ответ: $x = \pi n.$

Пример 18. Решить уравнение

$$\cos^2 2x + \frac{1}{4}\sin^2 4x + 1 = \sin 4x \cos 2x + \sin^2 x\,.$$

Решение. Запишем уравнение в виде

$$\cos^2 2x - \sin 4x \cos 2x + \frac{1}{4}\sin^2 4x + \cos^2 x = 0,$$

заметим, что первые три слагаемых есть полный квадрат:

$$(\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 4x)^2 + \cos^2 x = 0.$$

Последнее уравнение, аналогично предыдущему примеру, равносильно системе: $\begin{cases} \cos 2x - \frac{1}{2}\sin 4x = 0, \\ \cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0, \\ \sin 2x = 1, \end{array}\right. \\ \cos x = 0. \end{cases}$

Легко видеть эта система не имеет решения.

Ответ: $x \in \varnothing$.

Пример 19. Решить уравнение $\sin^{10} x + \cos^6 x = 1$.

Решение. Учитывая то, что $|\sin x| \le 1, |\cos x| \le 1$, получаем возможные случаи, удовлетворяющие уравнению:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin x = 0, \\ \cos x = \pm 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x = \pm 1, \\ \cos x = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{\pi k}{2}.$$

Если же оба слагаемых меньше 1, т.е. выполняется система $\begin{cases} |\sin x| < 1, \\ |\cos x| < 1, \end{cases}$ тогда уравнение не имеет решений. Докажем это.

Т.к. $|\sin x| < 1$, то $\sin^{10} x < \sin^2 x$ и т.к. $|\cos x| < 1$, то $\cos^6 x < \cos^2 x$. Таким образом, $\sin^{10} x + \cos^6 x < \sin^2 x + \cos^2 x = 1$, т.е. исходное равенство заведомо неверно.

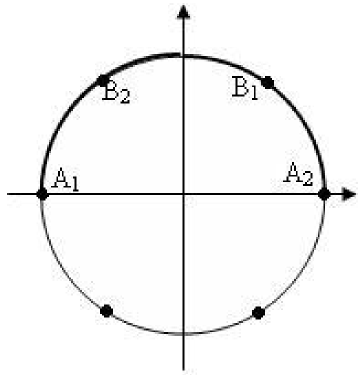
Ответ: $x = \dfrac{\pi k}{2}$.

§4. Иррациональные уравнения

Пример 20. Решить уравнение $\sqrt{1 - \cos 4x} = \sin x$

Решение. 1 способ. Уравнение $\sqrt{A(x)} = B(x)$, как известно из курса алгебры, равносильно системе $\begin{cases} A(x) = B^2(x), \\ B(x) \ge 0, \end{cases}$ поэтому из корней, которые мы получаем после возведения в квадрат, необходимо отобрать те, для которых $\sin x \ge 0$. Имеем

$$1 - \cos 4x = \sin^2 x, \text{ т.е.}$$



$$1 - \cos 4x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x),$$

$$1 - 2\cos^2 2x + 1 = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x),$$

$$4\cos^2 2x - \cos 2x - 3 = 0.$$

Положив $t = \cos 2x$, получаем $4t^2 - t - 3 = 0$, откуда

$$\cos 2x = 1, x = \pi n \text{ или } \cos 2x = -\frac{3}{4},$$

Отсюда следует

$$2x = \pm\arccos(-\frac{3}{4}) + 2\pi n, \quad x = \pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{3}{4}\right) + \pi n.$$

Производим отбор корней. Отметив полученные корни на тригонометрическом круге, увидим, что неравенству $\sin x \ge 0$ (выделенная дуга) удовлетворяют те решения, которые соответствуют точкам A_1, B_1, A_2, B_2.

Можно производить отбор иначе. Преобразуем уравнение $\cos 2x = -\frac{3}{4}$ к виду $1 - 2\sin^2 x = -\frac{3}{4}$, тогда $\sin^2 x = \frac{7}{8}$. По условию $\sin x \ge 0$, значит $\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}$ и $x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}} + \pi n$. Серия решений $x = \pi n$ также удовлетворяет условию $\sin x \ge 0$.

Ответ: $x = \pi n, \quad x = \left(-1\right)^n \arcsin \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}} + \pi n.$

2 способ. В данном уравнении естественным является применение формулы $\sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}$. К сожалению, такая запись тождества $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$ часто приводит к путанице и непониманию, порождает представление о некой «двузначности» синуса (косинуса) поло винного аргумента. В действительности она означает, что если $\sin\alpha \ge 0$, то $\sin\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}$, а если $\sin\alpha < 0$, то $\sin\alpha = -\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}$. Другими словами, $|\sin\alpha| = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}$. Таким образом, исходное уравнение равносильно такому: $\sqrt{2}\,|\sin 2x| = \sin x$.

Левая часть уравнения неотрицательна, поэтому $\sin x \ge 0$, и, значит, $\sin x$ можно вывести из-под знака модуля:

$$2\sqrt{2}\sin x\,|\cos x| = \sin x,$$

$$\sin x(2\sqrt{2}\,|\cos x| - 1) = 0 \quad \left(\sin x \ge 0\right).$$

Следовательно, $\sin x = 0, x = \pi n$ или

$$|\cos x| = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \cos x = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}, x = \pm\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}} + \pi n.$$

С помощью тригонометрического круга устанавливаем, что неравенству $\sin x \ge 0$ удовлетворяют корни

$$x = \pi n,\ x = \arccos\frac{1}{2\sqrt{2}} + 2\pi m,\ x = \pi - \arccos\frac{1}{2\sqrt{2}} + 2\pi m.$$

Ответ: $\pi n,\ \ \frac{\pi}{2}\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{4}+2\pi m$ (иначе: πn и $(-1)^n\arcsin\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}+\pi n$) или $x=\pi n,\ \ x=\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}}+2\pi m,$ $x=\pi-\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}}+2\pi m$.

§5. Системы тригонометрических уравнений

В этом параграфе мы ограничимся рассмотрением нескольких типов систем тригонометрических уравнений с двумя переменными x и y, опишем возможные способы их решения и разберем на примерах наиболее интересные из них.

5.1. Простейшие и сводящиеся к простейшим системы

Пример 21. Решить систему:

$$\begin{cases}\sin(x-y)=2\sin x\sin y,\\ x+y=\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Решение. После подстановки $y=\frac{\pi}{2}-x$ в первое уравнение получаем:

$$\sin(2x-\frac{\pi}{2})=2\sin x\sin(\frac{\pi}{2}-x),$$

$$-\sin(\frac{\pi}{2}-2x)=2\sin x\cos x,$$

$$-\cos 2x=\sin 2x,$$

$$\mathrm{tg}2x=-1.$$

$$x=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2},\ \ y=\frac{5\pi}{8}-\frac{\pi n}{2}.$$

Ответ: $\left(-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}, \frac{5\pi}{8}-\frac{\pi n}{2}\right)$.

Пример 22. Решить систему: $\begin{cases} \sin x\cos y = -\frac{1}{2}, \\ \cos x\sin y = \frac{1}{2}. \end{cases}$

Решение. Преобразуем систему, складывая и вычитая уравнения друг из друга. Это эквивалентное преобразование и, применяя формулы синуса суммы и синуса разности, получим:

$$\begin{cases} \sin x\cos y + \cos x\sin y = \sin(x+y) = 0, \\ \cos x\sin y - \sin x\cos y = \sin(y-x) = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = \pi n, \\ y-x = \frac{\pi}{2}+2\pi k. \end{cases}$$

Ответ: $x = \pi(\frac{n}{2}-k-\frac{1}{4}), \quad y = \pi(\frac{n}{2}+k+\frac{1}{4})$.

Пример 23. Решить систему:

$$\begin{cases} \sqrt{2}\cos x = 1+\cos y, \\ \sqrt{2}\sin x = \sin y. \end{cases}$$

Решение. Почленно возводя уравнения системы в квадрат и складывая, получаем уравнение – следствие системы:

$$2 = 1+2\cos y+\cos^2 y+\sin^2 y,$$

$$\cos y = 0, y = \frac{\pi}{2}+\pi n.$$

Заметим, что преобразование было неравносильное, поэтому подставляем полученные значения y в оба уравнения исходной системы (при этом удобно разбить на два случая):

1. Если n – чётное, $n = 2k$, то

$$\begin{cases} \cos x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ \sin x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi l,\ y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k.$$

2. Если же n – нечётное, $n = 2k + 1$, то

$$\begin{cases} \cos x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ \sin x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi l,\ y = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k.$$

Ответ: $\left\{\left(\dfrac{\pi}{4} + 2\pi l, \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k\right),\ \left(-\dfrac{\pi}{4} + 2\pi l, \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi k\right)\ \ l, k \in \mathrm{Z}\right\}.$

5.2. Сведение тригонометрической системы к алгебраической

Пример 24. Решить систему: $\begin{cases} \sin x + \cos y = 1, \\ \cos 2x - \cos 2y = 1. \end{cases}$

Решение. Заметим, что данная система легко преобразуется к указанному типу систем, действительно, т.к. $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ и $\cos 2y = 2\cos^2 y - 1,$ то произведём замену $u = \sin x,$ $v = \cos y$ и получим:

$$\begin{cases} u+v=1, \\ u^2+v^2=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=1-u, \\ u^2+1-2u+u^2=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=\dfrac{1}{2}, \\ u=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos y=\dfrac{1}{2}, \\ \sin x=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

$$x=(-1)^m\frac{\pi}{6}+\pi m,\ \ y=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n.$$

Ответ: $\left((-1)^m\dfrac{\pi}{6}+\pi m, \pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi n\right),\quad m, n\in \mathrm{Z}.$

5.3. Разложение одного из уравнений системы на множители

Пример 25. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}-\cos 2y=\left(\sin y-\dfrac{1}{2}\right)(1+2\sin 2x), \\ \mathrm{tg}^2 x+\mathrm{ctg}^2 x=6\mathrm{tg}^2 y. \end{cases}$$

Решение. Из равенства

$$\frac{1}{2}-\cos 2y=\frac{1}{2}-(1-2\sin^2 y)=\frac{1}{2}(4\sin^2 y-1)=\frac{1}{2}(2\sin y-1)(2\sin y+1)$$

следует, что первое уравнение системы допускает разложение на множители: $(2\sin y-1)(\sin y-\sin 2x)=0.$

Таким образом, система распадается на две:

$$(\mathrm{I})\begin{cases} 2\sin y-1=0, \\ \mathrm{tg}^2 x+\mathrm{ctg}^2 x=6\mathrm{tg}^2 y, \end{cases} \quad \text{и} \quad (\mathrm{II})\begin{cases} \sin y-\sin 2x=0, \\ \mathrm{tg}^2 x+\mathrm{ctg}^2 x=6\mathrm{tg}^2 y. \end{cases}$$

Для (I) имеем:

$$\sin y=\frac{1}{2}\Rightarrow \mathrm{tg}^2 y=\frac{\sin^2 y}{1-\sin^2 y}=\frac{1}{3}\Rightarrow \mathrm{tg}^2 x+\mathrm{ctg}^2 x=2.$$

Положив $t=\mathrm{tg}^2 x$, получаем $t+\dfrac{1}{t}=2, t=1, \mathrm{tg}x=\pm 1$.

Для (II) имеем: $\sin y = \sin 2x \Rightarrow \operatorname{tg}^2 y = \dfrac{\sin^2 2x}{1-\sin^2 2x}$.

Кроме того,

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} =$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x}{\frac{1}{4}\sin^2 2x}.$$

Обозначив $t = \sin^2 2x$, получаем $\dfrac{1-\frac{1}{2}t}{\frac{1}{4}t} = \dfrac{6t}{1-t}$, $t = -2$, $t = \dfrac{1}{2}$, т.е.

$\sin^2 2x = \dfrac{1}{2}$, $\sin 2x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $2x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2}$, $x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi n}{4}$.

Тогда $\sin y = \sin 2x = \sin(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2})$.

Для удобства разобьем множество значений величины $2x$ на два:

$$2x = \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi m \text{, тогда } \sin y = \sin 2x = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ и}$$

$$2x = -\frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi m \text{, тогда } \sin y = \sin 2x = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ответ: $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2}$, $y = (-1)^k \dfrac{\pi}{6} + \pi k$;

$x = \dfrac{\pi}{4} \pm \dfrac{\pi}{8} + \pi m$, $y = (-1)^k \dfrac{\pi}{4} + \pi k$;

$x = -\dfrac{\pi}{4} \pm \dfrac{\pi}{8} + \pi m$, $y = (-1)^{k+1} \dfrac{\pi}{4} + \pi k$.

5.4. Решение системы тригонометрических уравнений методом подстановки

Пример 26. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 17\cos 2x - 7 = 21\sin x\cos 2y, \\ \cos x = \sqrt{3\sin x}\cos y. \end{cases}$$

Решение. Заметим, что если $\sin x = 0$, то из второго уравнения $\cos x = 0$, что невозможно. Значит, $\sin x \neq 0$. Выразив из второго уравнения $\cos y$, подставим в первое:

$$\cos y = \frac{\cos x}{\sqrt{3\sin x}}, \; 17\cos 2x - 7 = 21\sin x\left(2\frac{\cos^2 x}{3\sin x} - 1\right),$$

$$17\cos 2x - 7 = 14\cos^2 x - 21\sin x.$$

Сделаем подстановку $t = \sin x : 17(1-2t^2) - 7 = 14(1-t^2) - 21t,$ откуда $t = \frac{1}{4}, \; t = \frac{4}{5}.$

Итак, исходная система равносильна совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin x = \dfrac{1}{4}, \\ \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos y. \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x = \dfrac{4}{5}, \\ \cos x = 2\sqrt{\dfrac{3}{5}}\cos y. \end{cases} \end{array}\right.$$

Для первой системы $\cos x = \pm\frac{\sqrt{15}}{4} \Rightarrow \cos y = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$, что невозможно.

Для второй $\cos x = \pm\frac{3}{5}, \quad \cos y = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}$, т.е. $x = \pm\arccos\frac{3}{5} + \pi n,$

$y = \pm\arccos\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}} + \pi m.$

Отметим, что:

1) правильный выбор целочисленных параметров, нумерующих решения простейших тригонометрических уравнений в системах, требует внимательности и аккуратности. Так, запись

$$x = \pm\arccos\frac{3}{5} + \pi n, \quad y = \pm\arccos\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}} + \pi n$$

немедленно ведёт к потере бесконечного числа решений, например, решений

$$x = \arccos\frac{3}{5}, \quad y = \arccos\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}} + \pi n, \quad n \neq 0;$$

2) равенство $\cos x = \pm\frac{3}{5}$ даёт $\sin x = \pm\frac{4}{5}$, поэтому при нахождении корней необходимо учитывать первое уравнение системы: $\sin x = \frac{4}{5}$. Значит, $x = (-1)^k \arcsin\frac{4}{5} + \pi k$;

3) полученные формулы, задающие значения y, нельзя сразу включать в ответ, т.к. согласно второму уравнению системы знаки $\cos x$ и $\cos y$ должны совпадать. Значит, при $x = \arcsin\frac{4}{5} + 2\pi k$ $\cos y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}$, а при $x = \pi - \arcsin\frac{4}{5} + 2\pi k$ $\cos y = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}$.

Ответ: $x = \arcsin\frac{4}{5} + 2\pi k$, $y = \pm\arccos\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}} + 2\pi m;$

$$x = \pi - \arcsin\frac{4}{5} + 2\pi k, \quad y = \pi + \arccos\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}} + 2\pi m.$$

Контрольные вопросы

1(2). Понизить степень многочлена $\sin^6 x + \cos^6 x$.

2(3). Найти максимум и минимум функции без вычисления производной, используя метод введения дополнительного угла.

$$f(x) = 2\sqrt{3}\sin(2x - \frac{\pi}{9}) - 2\sqrt{13}\cos^2(x - \frac{\pi}{18}) + 7.$$

3(3). Показать, что уравнение $\sin 2x \sin 3x = 1$ не имеет решений (см. пример 13).

4(3). Решить уравнение $\sin^4 \frac{9}{2}x + \cos^2 7x = 0$ (см. пример 17).

5(4). Решить уравнение $\mathrm{ctg}x = 1 + 2\cos 2x \cos x$.

6(4). Решить уравнение $\mathrm{tg}x + \dfrac{3\cos x}{2\cos x - \sin x} = 0$.

7(4). Решить уравнение $20\sin^3 x + 3\cos x = 3\cos 3x + 4\sin x$.

8(4). Решите уравнение $\sin^4 4x - 2\sin 4x \cos^4 x + \cos^2 x = 0$ как квадратное относительно $\sin 4x$.

9(4). При каких значениях параметра *a* уравнение $\sin^8 x + \cos^8 x = a$ имеет решение (см. пример 19)?

Задачи
Решить уравнения

1(4). $7\sin x + 7\cos 2x = \sin 2x \cos x + 7\cos^2 x$.

2(3). $\sin 3x - |\sin x| + 3 = \sin 2x$.

3(4). $(\sin x + \sqrt{3}\cos x)\sin 4x = 2$.

4(5). $\sin x \sin 3x \sin 7x = 1$.

5(3). $\dfrac{2\sin 3x + \sin 5x}{|\sin x|} = 1$.

6(5). $\dfrac{\cos 2x + \cos x}{\sin 2x - \mathrm{tg}x} = \mathrm{tg}2x$.

7(5). $\sqrt{5\cos x - \cos 2x} = -2\sin x$.

8(5). $2+\sqrt{3}\sin x+|\cos x|=4\cos^2 x.$

9(5). $\dfrac{\cos 3x\sin 5x+|\cos 5x\sin 3x|}{\cos 2x}=2\sin 2x.$

10(5). $\sqrt{4\sin x+\cos 2x+5}=2\sqrt{2}\cos x.$

11(5). $(5\sin x+12\cos x)(100+48\cos x-13\cos 2x)=1757.$

12(5). $5\sin 3x+16\cos x+5\sin x=12\cos^3 x.$

13(5). $\dfrac{\sin 6x}{\sin 4x}=\dfrac{\cos 3x}{|\cos x|}.$

Решить системы уравнений

14(5). $\begin{cases}\sin x=\sin y,\\ \cos x=\sin 2y.\end{cases}$

15(5). $\begin{cases}\sqrt{2\mathrm{tg}x-4\mathrm{ctg}x}=3\mathrm{tg}y,\\ \sqrt{2\sin 2x}=\dfrac{4}{3}\sin x\cos y.\end{cases}$