

§ 11. Примеры решения задач

Задача 11.1. С помощью собирающей линзы с фокусным расстоянием F на экране Э, расположенном на расстоянии $L = 4,9F$ от циферблата наручных часов Ц,

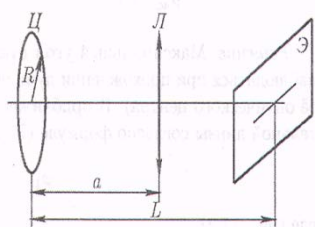


Рис. 11.1

получено уменьшенное изображение секундной стрелки часов, длина которой $R = 1,5$ см (см. рис. 11.1). Главная оптическая ось линзы перпендикулярна экрану и плоскости циферблата часов и проходит через ось вращения секундной стрелки. Чему равна линейная скорость перемещения кончика изображения стрелки на экране? (МФТИ)

Решение. Запишем уравнение тонкой линзы:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{L-a} = \frac{1}{F} \Rightarrow a^2 - La + LF = 0 \Rightarrow$$

$$a_1 = \frac{L}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4F}{L}} \right) = 3,5F;$$

$$a_2 = \frac{L}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4F}{L}} \right) = 1,4F.$$

Поскольку по условию изображение уменьшенное, то $a = 3,5F$, следовательно, $b = L - a = 1,4F$, увеличение $\Gamma = \frac{b}{a} = \frac{1,4}{3,5} = 0,4$.

Длина изображения стрелки $R' = R\Gamma = 0,6$ см, скорость

$$v = R'\omega = R'\frac{2\pi}{T} \approx 0,063 \text{ см/с.}$$

Задача 11.2. На главной оптической оси тонкой положительной линзы диаметром D находится точечный источник света S . Из линзы выходит расходящийся пучок лучей с максимальным углом α отклонения лучей от главной оптической оси. Определить максимальный угол отклонения β , если вместо положительной линзы на то же место поставить отрицательную линзу того же диаметра и с тем же фокусным расстоянием. Расстояние между источником и линзой равно d (МФТИ).

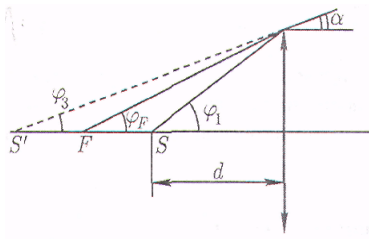


Рис. 11.2

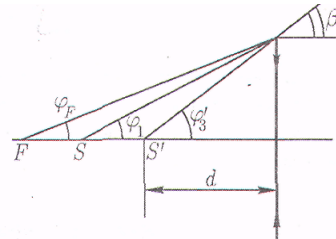


Рис. 11.3

Решение. Максимальный угол отклонения луча от оптической оси будет наблюдаться при прохождении луча через край линзы (на расстоянии $\frac{D}{2}$ от её оптического центра).

В приближении параксиальной оптики для положительной линзы согласно формуле (7.12)

$$\varphi_1 - \varphi_3 = \varphi_F,$$

где (рис. 11.2)

$$\varphi_1 \approx \frac{D}{2d}, \quad (11.1)$$

а $\varphi_3 = \alpha$ по построению. Следовательно,

$$\varphi_1 - \alpha = \varphi_F. \quad (11.2)$$

Для отрицательной линзы $\varphi'_3 - \varphi_1 = \varphi_F$ (см. рис. 11.3). Но по построению

$$\varphi'_3 = \beta \Rightarrow \beta - \varphi_1 = \varphi_F \quad (11.3)$$

Решая совместно уравнения (11.2) и (11.3), получаем

$$\beta = 2\varphi_1 - \alpha,$$

или, с учетом (11.1)

$$\beta = \frac{D}{d} - \alpha.$$

Некоторые учащиеся решили задачу «точно». В этом случае они получили ответ

$$\beta = \arctg \left[\frac{D}{d} - \operatorname{tg} \alpha \right].$$

Задача 11.3. Тонкая линза создает на экране изображение предмета в 20 раз большее, чем предмет. Экран передвинули вдоль оси линзы на 4 м. Чтобы получить резкое изображение, предмет пришлось переместить на 40 см. Каким при этом стало увеличение? В какую сторону – к линзе или от линзы – переместили предмет? (МФТИ)

Решение. Продольное увеличение

$$G_{12} = \left| \frac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2} \right|,$$

где

$$|b_1 - b_2| = 4 \text{ м}, \quad |a_1 - a_2| = 0,4 \text{ м} \Rightarrow G_{12} = 10.$$

По условию $G_1 = 20$. Согласно формуле (10.5),

$$G_{12} = G_1 G_2 \Rightarrow G_2 = \frac{G_{12}}{G_1}.$$

Таким образом, поперечное увеличение $G_2 = 10 / 20 = 0,5$.

По определению $G = \frac{a}{b}$. Так как G уменьшилось, расстояние от предмета до линзы должно быть увеличено. Следовательно, предмет переместили от линзы.

Задача 11.4. В комнате на столе лежит плоское зеркало, на котором находится тонкая плоско-выпуклая линза с фокусным расстоянием $F = 40$ см. По потолку ползет муха со скоростью $v = 2$ см/с. Расстояние от потолка до зеркала $h = 220$ см (рис. 11.4).

1. На каком расстоянии от зеркала находится изображение мухи в данной оптической системе?

2. Чему равна скорость изображения мухи в тот момент, когда она пересекает главную оптическую ось линзы? (МФТИ, 1998)

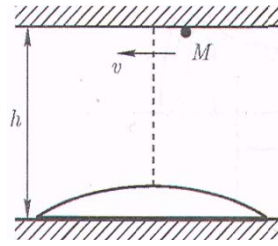


Рис. 11.4

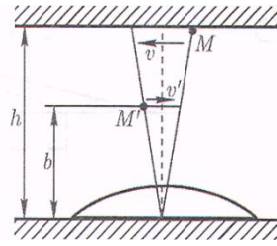


Рис. 11.5

Решение. Луч света после прохождения линзы отражается от зеркала и проходит сквозь линзу еще раз. Таким образом, оптическая сила системы «линза + зеркало» в два раза больше оптической силы одной линзы:

$$P_{\text{сист}} = \frac{2}{F}.$$

Расстояние от центра зеркала (и линзы) до изображения мухи найдем с помощью формулы линзы:

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{h} = \frac{2}{F} \Rightarrow b = \frac{hF}{2h - F} = 22 \text{ см}.$$

Скорость изображения мухи найдем из соотношения подобия (рис. 11.5):

$$\frac{v\Delta t}{h} = \frac{v'\Delta t}{b} \Rightarrow v' = v \frac{b}{h} = 0,2 \text{ см/с}.$$

Задача 11.5. Тонкая плосковыгнутая линза с фокусным расстоянием $F = 15 \text{ см}$ приклеена плоской стороной к стенке аквариума, заполненного водой ($n = 4/3$). На линзу под углом α к главной оптической оси падает параллельный пучок света. Известно, что луч, прошедший сквозь линзу на расстоянии h от ее оптического центра, не изменяет своего направления. Найти h , если $\text{tg}\alpha = 0,08$ (МФТИ).

Решение. Если бы за линзой не было аквариума, то

$$\beta - \alpha = \varphi_F. \tag{11.4}$$

Наличие аквариума приводит к тому, что

$$\beta = n\beta', \tag{11.5}$$

где β' – угол между лучом в воде и главной оптической осью (рис.11.6). По условию $\beta' = \alpha$. Решая (11.4) и (11.5), получим $\varphi_F = n\alpha - \alpha = (n - 1)\alpha$.

С другой стороны $\varphi_F = \frac{h}{F} \Rightarrow h = F(n - 1)\alpha$.

Численная подстановка дает $h = 0,4 \text{ см}$.

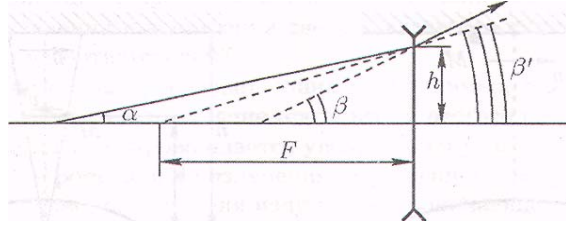


Рис. 11.6