## § 7. Линзы

Применим разработанную нами методику для исследования свойств оптических линз. Пусть $x$ — главная оптическая ось рассматриваемой системы (рис. 7.1).

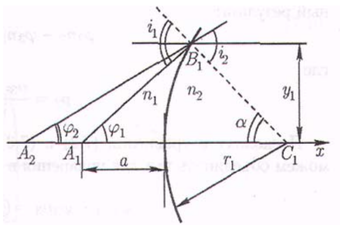


**Рис. 7.1**

Будем считать острый угол между оптическим лучом и положительным направлением оси $x$ положительным, если он отсчитывается против часовой стрелки. В противном случае угол будет отрицательным.

Из произвольной точки $C_1$, лежащей на оси системы, построим сферическую поверхность радиуса $r_1$, разделяющую пространство на две половины.

Пусть в левой половине пространства показатель преломления равен $n_1$, а в правой — $n_2$, причем, для определенности, будем считать, что $n_2 > n_1$.

Введём определение: *радиус кривизны оптической поверхности считается положительным, если центр кривизны расположен справа от неё, в противном случае, радиус будет отрицательным.* Поместим на главной оптической оси в точке $A_1$ крошечную лампочку (точечный источник света) и рассмотрим один из лучей, распространяющихся от этого источника до точки $B_1$, лежащей на границе раздела двух сред. В точке $B_1$ произойдет преломление, и луч света, изменив направление своего движения, пойдет так, как будто он, будучи испущенным в точке $A_2$, все время распространялся прямолинейно.

Для треугольника $A_1B_1C_1$ угол падения $i_1$ — внешний, поэтому в соответствии с теоремой о внешнем угле треугольника $i_1 = \varphi_1 + \alpha$. Аналогичным образом для треугольника $A_2B_1C_1$ внешним будет угол преломления $i_2$, и поэтому $i_2 = \varphi_2 + \alpha$. Подставим найденные значения углов $i_1$ и $i_2$ в закон Снелла (5.1): $n_1i_1 = n_2i_2$. Получится

$$(\varphi_1 + \alpha)n_1 = (\varphi_2 + \alpha)n_2. \tag{7.1}$$

В рамках параксиальной оптики $\alpha = y_1 / r_1$, поэтому из (7.1) получим:

$$\varphi_1 n_1 - \varphi_2 n_2 = p_1 y_1. \tag{7.2}$$

Здесь мы ввели величину $p_1 = \dfrac{n_2 - n_1}{r_1}$, называемую *оптической силой* поверхности. Данное обозначение весьма полезно, т.к. оптическая сила зависит только от свойств преломляющей поверхности и одинакова для всех лучей!

Теперь предположим, что на пути луча оказалась другая сферическая поверхность с радиусом $r_2$, разделяющим пространство на области с показателями преломления $n_2$ и $n_3$. Пусть $n_2 > n_3$ и $r_2$ отрицателен.

Рассуждая аналогично ранее рассмотренному случаю, мы получим подобный результат:

$$\varphi_2 n_2 - \varphi_3 n_3 = p_2 y_2, \tag{7.3}$$

где

$$p_2 = \frac{n_3 - n_2}{r_2}. \tag{7.4}$$

Поскольку в уравнения (7.2) и (7.3) входит общее слагаемое: $\varphi_2 n_2$, мы можем объединить эти два уравнения в одно, исключив $\varphi_2 n_2$:

$$\varphi_1 n_1 - \varphi_3 n_3 = (p_1 y_1 + p_2 y_2). \tag{7.5}$$

Среду с показателем преломления $n_2$, ограниченную поверхностями $r_1$ и $r_2$, назовем *линзой*.

Если расстояние между боковыми поверхностями линзы настолько мало, что изменение высоты луча внутри линзы можно не учитывать, то такая линза называется *тонкой.*

Для тонкой линзы формула (6.6) позволяет дать простую и красивую физическую интерпретацию. В самом деле, мы теперь можем опустить индексы у высоты луча «*у*». Тогда (7.5) примет вид:

$$\varphi_1 n_1 - \varphi_3 n_3 = (p_1 + p_2)y. \qquad (7.6)$$

Из (7.6) следует первый вывод: оптическая сила двух близко расположенных преломляющих поверхностей равна их сумме:

$$p_{\text{общ}} = p_1 + p_2\,. \qquad (7.7)$$

Применительно к тонкой линзе этот вывод можно сформулировать так: оптическая сила линзы равна сумме оптических сил ее преломляющих поверхностей.

Если справа и слева от линзы находится воздух (это наиболее типичная ситуация), то $n_1 = n_3 = 1$, и формула (7.5) станет еще проще:

$$\varphi_1 + \varphi_3 = \varphi_F\,. \qquad (7.8)$$

В правой части (7.8) стоит выражение

$$\varphi_F = \frac{y}{F}, \text{ где } \frac{1}{F} = p_{\text{общ}} = \frac{n_2 - 1}{r_1} + \frac{1 - n_2}{r_2} = (n_2 - 1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right), \qquad (7.9)$$

$F$ имеет размерность длины. Выясним физический смысл этого параметра.

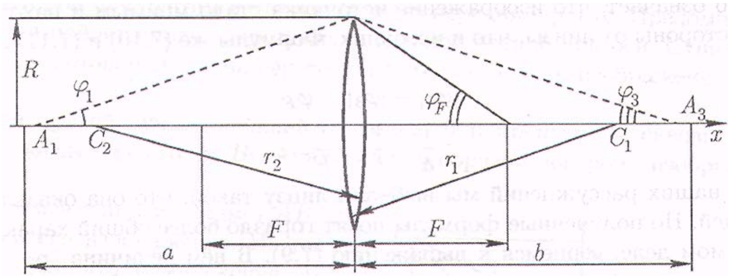


**Рис. 7.2**

В принятых нами обозначениях угол $\varphi_3$ отрицателен, т.к. он отсчитывается от главной оптической оси по часовой стрелке (рис. 7.2), точно также отрицателен и радиус $r_2$ (определение на стр. 13). Если брать только абсолютные величины углов, то вместо (7.8) следует записать

$$|\varphi_1| + |\varphi_3| = \varphi_F \tag{7.10}$$

Начнем отодвигать наш источник света все дальше и дальше от линзы. Угол $\varphi_1$ при этом будет уменьшаться, и в пределе обратится в 0, а угол $\varphi_3$ станет равным $\varphi_F$ .

Вот и проясняется физический смысл величины $F$. Все лучи, проходящие параллельно главной оптической оси системы (независимо от расстояния $y$ до нее), преломившись в линзе, соберутся в одной точке, называемой *фокусом* и отдаленной от линзы на расстояние $F$. Величина $F$ называется *фокусным расстоянием* линзы, а линза – *собирающей*. Стал ясен и физический (геометрический) смысл отношения $y / F = \varphi_F$ – – это угол, под которым из фокуса линзы видна точка, в которой произошло преломление падающего луча.

Если принять $y = R$ (где $R$ – радиус линзы), то смысл соотношения (7.10) станет еще проще: сумма углов, под которыми виден край собирающей линзы из точек расположения источника света и его изображения, есть величина постоянная, равная углу, под которым из фокуса виден этот же край (рис. 7.2).

В задачах углы даются редко. Обычно известно расстояние от линзы до предмета или до его изображения и фокусное расстояние. Учитывая, что $|\varphi_1| \approx R/a,$ $\varphi_F \approx R/F,$ а $|\varphi_3| \approx R/b,$ мы из (7.10) после сокращения на $R$ получим знаменитое выражение для формулы линзы:

$$\boxed{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}.} \tag{7.11}$$

Стоит отметить, что, хотя для практических вычислений формула (7.11) значительно удобнее формулы (7.10), в последней записи совершенно исчезает ясное физическое содержание полученного нами закона, которому подчиняются все оптические лучи, проходящие через тонкие собирающие линзы.

Наконец, важно помнить, что формулы линзы получены нами в приближении параксиальной оптики и поэтому не следует их абсолютизировать.

Теперь попробуем извлечь пользу из полученных нами формул. Совершенно ясно, что если источник приблизить к линзе настолько, что он окажется к ней ближе, чем ее передний фокус, то для сохранения смысла формулы (7.10) будет необходимо перед абсолютным значением величины угла $\varphi_3$ взять минус. Это означает, что изображение источника стало мнимым и находится с той же стороны от линзы, что и источник. Формулы же (7.10) и (7.11) примут вид

$$|\varphi_1| - |\varphi_3| = \varphi_F \tag{7.12}$$

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{F}. \qquad (7.13)$$

Для наших рассуждений мы выбрали линзу такой, что она оказалась собирающей. Но полученные формулы носят гораздо более общий характер.

В самом деле, вернемся к выражению (7.9). В нем величина $(n_2-1)$ положительная, а вот радиусы $r_1$ и $r_2$ могут иметь разные знаки. Все зависит от того, с какой стороны находится центр кривизны соответствующих поверхностей. Мы уже видели, что для двояковыпуклой линзы $r_1>0, r_2<0$, а их подстановка в рассматриваемое выражение приводит к тому, что $F$ всегда положителен. По этой причине линзы с положительным фокусным расстоянием иногда называют положительными. Если же $r_1<0$, а $r_2>0$, т. е. линза двояковогнутая, то фокусное расстояние окажется отрицательным, а значит *отрицательной* (рассеивающей) будет и линза. Иногда знак кривизны преломляющих поверхностей линзы задают иначе. Говорят, что если данная поверхность линзы выпуклая, то радиус кривизны этой поверхности поло-жителен, если вогнутая – отрицателен. При внимательном анализе оказыва-ется, что оба подхода дают одинаковые результаты.

Если фокусное расстояние линзы отрицательно, это приводит к перестановке переднего и заднего фокусов линзы. Фактически мы будем наблюдать следующее: параллельный пучок, падающий слева на линзу, после преломления всегда будет расходиться, причем исследователю, стоя-щему справа от линзы, будет казаться, что источник находится в фокусе линзы (см. рис. 7.3).

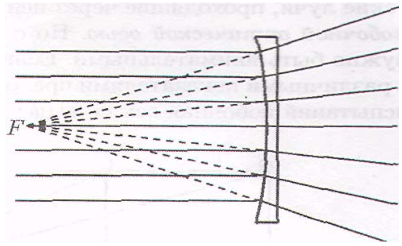

**Рис. 7.3**

При желании вы легко можете обобщить наши результаты на случай, когда линза находится не в воздухе, а в среде с показателем преломления *n,* отличным от 1, или когда слева и справа от линзы находятся среды с различными показателями преломления, или когда центры кривизны обеих поверхностей линзы лежат с одной стороны, или…

### § 8. Построение изображений, даваемых тонкой линзой

Предположим, что у нас есть тонкая собирающая линза. Поместим слева от нее на расстоянии, большем фокусного, вертикальную стрелку *AB.*

Пустим первый луч из точки *B* на линзу параллельно главной оптической оси. Преломившись в линзе, луч пойдет из точки *B* через задний фокус вправо и вниз. Второй луч пустим из точки *B* через передний фокус. Преломившись в линзе, он пойдет вправо параллельно главной оптической оси. Существует точка $B_1$, в которой оба луча пересекутся. Точка $B_1$ есть изображение точки *B*.

Любой другой луч, вышедший из точки *B* и прошедший сквозь линзу, должен пройти через точку $B_1$. Аналогичным образом построим изображение точки *A*.

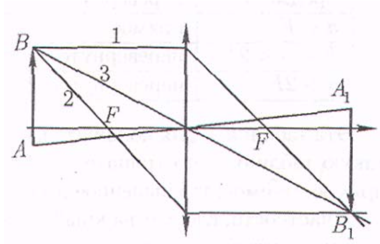


**Рис. 8.1**

Итак, имея линзу и предмет *AB,* мы построили его изображение. Из рис. 8.1 видно, что изображение $A_1B_1$, как и предмет *AB*, перпендикулярно главной оптической оси.

Отметим два достаточно общих свойства линзы:

1) прямую линию линза изображает также прямой;

2) если в пространстве предметов прямая перпендикулярна главной оптической оси, то и ее изображение останется перпендикулярным этой оси. Вообще говоря, углы в пространстве предметов и пространстве изображений различны. Это так же видно из рис. 8.2. Прямоугольник *ABCD* линза «превратила» в трапецию $A_1B_1C_1D_1$.

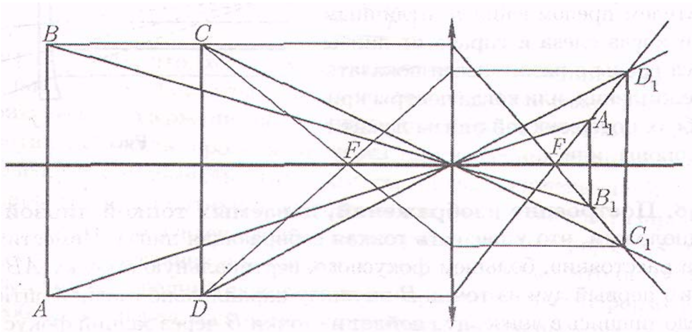


**Рис. 8.2**

Если справа и слева от линзы находится одна и та же среда, то для построения изображения точки часто оказывается удобным использовать еще один «замечательный» луч — тот, который идет через центр линзы. На рис. 8.1 он помечен как луч 3. Этот луч, проходя через линзу, не меняет своего направления и так же, как и первые два луча, проходит через точку $B_1$. Иногда такие лучи, проходящие через центр линзы, за их «несгибаемость» называют *побочной оптической осью.* Но с лучами, проходящими через центр линзы, нужно быть внимательными. Если слева и справа от линзы находятся среды с различными показателями преломления (например, вода и воздух), то таких испытаний побочная ось не выдерживает и… сгибается!

Для изображений **действительных** предметов, даваемых тонкими собирающими линзами, полезно запомнить следующую таблицу.

| Расстояние от линзы до предмета | Изображение прямое или перевернутое | Изображение действительное или мнимое | Изображение увеличенное или уменьшенное |
|---|---|---|---|
| $a < F$ | прямое | мнимое | увеличенное |
| $F < a < 2F$ | перевернутое | действительное | увеличенное |
| $a > 2F$ | перевернутое | действительное | уменьшенное |

Эта таблица — для положительной линзы. Если вы попытаетесь заполнить такую таблицу для отрицательной линзы, то убедитесь, что она всегда дает прямое, мнимое, уменьшенное изображение действительного предмета. Отсюда, в частности, следует важный вывод: прямое изображение действительного предмета всегда мнимое.

**Задача 8.1.** Показать с помощью построения направление, вдоль которого пришел к линзе луч *AB* (рис. 8.3).

**Решение.** Прежде всего, при решении задач подобного рода ищут фокальные плоскости. Для этого следует провести через оптический центр *O* линзы побочную ось, параллельную одной из половинок луча, преломившегося в линзе, например, $KL$ (рис. 8.4). Проверьте самостоятельно, что эта методика работает и для луча $LM$. Продолжим луч $LM$ влево до пересечения в точке $F_л$ с побочной оптической осью.

Из материала, изложенного в конце предыдущего параграфа, следует, что эта точка лежит в фокальной плоскости.

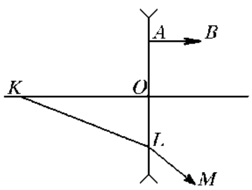


**Рис.8.3**

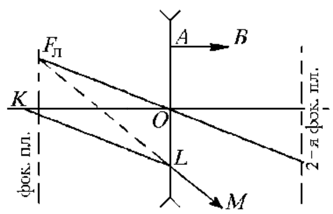


**Рис. 8.4**

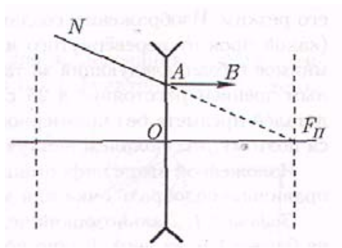


**Рис. 8.5**

Другая фокальная плоскость находится справа от линзы на том же расстоянии. Теперь проводим через оптический центр линзы вторую побочную ось параллельно лучу $AB$. В нашем случае она совпадает с оптической осью системы. Интересующий нас луч должен пройти через точку $A$ и точку $F_п$ пересечения построенной оси с правой фокальной плоскостью. Таким образом, прямая $NA$ и есть недостающая часть луча, который, преломившись в линзе, пойдет вдоль прямой $AB$ (рис. 8.5).

 