Федеральная заочная физико-техническая школа
при Московском физико – техническом институте
(государственном университете)

МАТЕМАТИКА

Стереометрия

Задание №5 для 10-х классов

(2007-2008 учебный год)

г. Долгопрудный, 2008

Составитель: С.А. Беляев, ассистент кафедры высшей математики МФТИ.

Математика: задание №5 для 10-х классов (2007-2008 учебный год). - М.: МФТИ, 2008, 26с.

Составитель:
Беляев Сергей Анатольевич
Изд. лиц. №040060 от 21.08.96г. Подписано 09.01.08
Формат 60х90 1/16. Бумага типографская. Печать офсетная. Усл. печ. л.1,62
Уч.-изд. л. 1,44. Тираж 1700. Заказ №10-з.

Федеральная заочная физико-техническая школа
Московский физико-технический институт
(государственный университет)
«ФИЗТЕХ-ПОЛИГРАФ»

141700, Москов. обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
ФЗФТШ при МФТИ, тел/факс (495) 408-5145 – **заочное отделение**
тел./факс (495) 409-9351 – **очно-заочное отделение**
тел.409-9583 – **очное отделение**

E.mail: zftsh@pop3.mipt.ru

Наш сайт: www.school.mipt.ru

§ 1. Параллельность прямых и плоскостей

Определение параллельных прямых, параллельной прямой и плоскости, параллельных плоскостей приведены в школьном учебнике геометрии. В дополнение к материалу учебника приведем некоторые теоремы, часто используемые при решении многих задач по стереометрии.

Теорема 1 (*теорема о линии пересечения*). *Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.*

Пусть плоскость β пересекает плоскость α по прямой b и проходит через прямую a такую, что $a \| \alpha$ (рис.1). Тогда a и b лежат в плоскости β и не пересекаются, иначе точка их пересечения принадлежала бы плоскости α, что противоречит параллельности a и α, следовательно, $a \| b$.

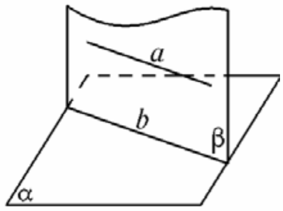


Рис. 1

Теорема 2. *Если через каждую из двух параллельных прямых проведена плоскость и эти плоскости пересекаются, то линия их пересечения параллельна каждой из данных прямых.*

Пусть $a \| b$, где $a \subset \alpha, b \subset \beta$, причем $\alpha \cap \beta = c$ (рис. 2). Докажем, что $c \| a$ и $c \| b$. Действительно, поскольку $b \subset \beta$ и $a \| b$, то $a \| \beta$ по признаку параллельности прямой и плоскости. По теореме о линии пересечения $c \| a$. Аналогично доказывается, что $c \| b$.

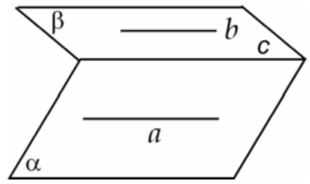


Рис. 2

Теорема 3. *Если прямая параллельна каждой из двух пересекающихся плоскостей, то она параллельна их линии пересечения.*

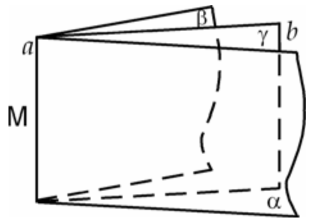


Рис. 3

Пусть плоскости α и β пересекаются по прямой a, а прямая b параллельна плоскостям α и β. Возьмем на прямой a точку M и проведем плоскость γ через b и M (рис. 3). Пусть плоскость γ пересекает плоскость α по прямой a_1, а плоскость β — по прямой a_2. По теореме о линии пересечения $a_1 \| b$ и $a_2 \| b$.

Но прямые a_1 и a_2 имеют общую точку M , следовательно, это одна и та же прямая a (так как $a_1 \in \alpha$, $a_2 \in \beta$). Итак, $a \parallel b$.

Пример 1. *Доказать, что через каждую из двух скрещивающихся прямых можно провести плоскость так, чтобы эти плоскости были параллельны.*

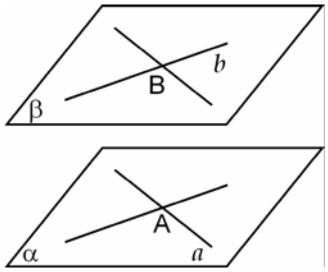
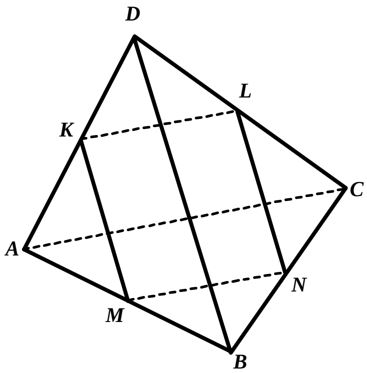


Рис. 4

Пусть прямые a и b скрещиваются. Возьмем на прямой a точку A и проведем через нее прямую, параллельную прямой b (в плоскости, проходящей через A и b). Через a и построенную прямую проведем плоскость α. Аналогично строим плоскость β (рис. 4). По признаку параллельности плоскостей $\alpha \parallel \beta$.

Приведенное построение часто оказывается полезным при решении многих задач о скрещивающихся прямых, поэтому следует его запомнить.



Пример 2. Даны точки *A*, *B*, *C* и *D* не лежащие в одной плоскости. Докажите, что середины отрезков *AB*, *BC*, *CD* и *DA* являются вершинами параллелограмма (пространственная теорема Вариньона[1]).

□ Действительно, пусть *K* – середина *AD*, *L* – середина *DC*, *M* – *AB* и *N* – *BC* соответственно. Тогда *KL* – средняя линия треугольника *ADC* и потому *KL*|| *AC*. Аналогично *MN*||*AC*. Следовательно *KL*||*MN*. Значит точки *K*, *L*, *M* и *N* лежат в одной плоскости, проходящей через пару параллельных прямых *KL* и *MN*. Рассуждая аналогично, получаем, что *KM*|| *BD*|| *LN*. Откуда следует, что в плоском четырёхугольнике *KLMN* противолежащие стороны параллельны. То есть он является параллелограммом. ■

§ 2. Сечения многогранников

Если пересечением многогранника и плоскости является многоугольник, то он называется *сечением* многогранника указанной плоскостью (*секущей плоскостью*).

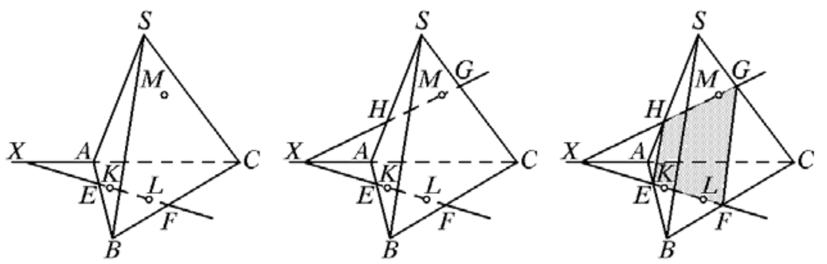
[1] **Вариньон** Пьер (Varingnon Pierre), 1654 – 1722, французский математик и механик, член Парижской Академии Наук, с 1704 профессор College de France. Основные труды по геометрии и статике. Одним из первых предложил разработку дифференциального исчисления Г. Лейбница.

Мы будем заниматься решением следующей задачи: на данном изображении многогранника построить его сечения данной плоскостью.

По сложившейся традиции, мы будем далее писать «*построить сечение многогранника*», опуская слово «*изображение*». Кроме того, вершины изображения многоугольника мы будем обозначать теми же буквами, что и соответствующие вершины оригинала. В формулировке нашей задачи мы не указали способ задания секущей плоскости. Это можно сделать по-разному, например, тремя точками, не лежащими на одной прямой, двумя точками и условием параллельности некоторой прямой, точкой и условием параллельности некоторой плоскости и т.п.

Сначала рассмотрим самый простой случай, когда секущая плоскость задана тремя точками, две из которых лежат в плоскости одной грани многогранника, а третья — в плоскости грани, смежной с первой. В этом случае, как правило (если не возникает параллельности некоторых прямых, на чем мы ниже остановимся особо), для обоснования построения не приходится выходить за рамки аксиом и, быть может, простейших следствий из них.

Приведем характерный пример.



а) **б)** **в)**

Рис. 5

Пример 3. *Построить сечение тетраэдра* $SABC$ *плоскостью, проходящей через точки* K, L, M (*рис.5* a)*;* $K \in (ABC)$, $L \in (ABC)$, $M \in (ASC)$.

Для решения поставленной задачи построим линии пересечения секущей плоскости с гранями тетраэдра. Предположим, что плоскость KLM (которую обозначим α) построена. Так как плоскости α и (ABC) имеют общую точку K, то они пересекаются по прямой, проходящей через точку K, а раз эти плоскости имеют еще одну общую точку — точку L, то прямая KL является линией пересечения плоскостей α и ABC. Отсюда вытекает следующее построение: проведем прямую KL до пересечения с отрезками AB и BC в точках E и F (рис. 5б). Пусть эта прямая пересекает прямую AC в точке X. Будем рассуждать аналогично: точки X и M лежат как в плоскости α, так и в плоскости (ASC), следовательно, прямая XM — их линия пересечения, поэтому строим прямую XM до пересечения с отрезками SA и SC в точках H и G (рис. 5*в*). Повторяя рассуждения по той же схеме, делаем вывод о том, что плоскости α и (ASB) пересекаются по прямой EH, а плоскости α и (BSC) – по прямой FG. Поэтому для завершения построения остается соединить точку E с точкой H и точку F с точкой G (рис. 5*в*).

Что же изменится в приведенных рассуждениях, если прямые KL и AC окажутся параллельными? В этом случае придется воспользоваться теоремами о параллельности в пространстве. Так как прямая KL параллельна прямой AC, лежащей в плоскости (ASC), то по признаку параллельности прямой и плоскости прямая KL параллельна плоскости (ASC). Но плоскость α проходит через прямую KL, следовательно (теорема о линии пересечения), линия пересечения плоскостей α и ASC должна быть параллельна прямой KL. Поэтому строим через точку M прямую, параллельную KL, до пересечения с отрезками SA и SC в точках H и G. Соединив точки H и E, а также G и F, получим искомое сечение (рис. 6).

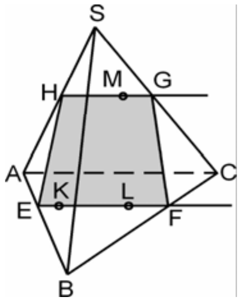


Рис. 6

Мы видим, что проведенное построения сечения в обоих случаях было основано на нахождении линий пересечения секущей плоскости с плоскостями граней многогранника – так называемых *следов* секущей плоскости на плоскостях граней. Отсюда и происходит название метода построения сечений, который мы только что проиллюстрировали, – «метод следов».

Пример 6. *Построить сечение куба* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ *плоскостью, проходящей через точки M и N – середины рёбер AB и* AA_1 *соответственно и через точку F – середину грани* BCB_1C_1. *В каком отношении плоскость сечения делит ребро* BC.

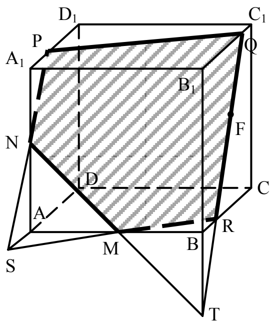
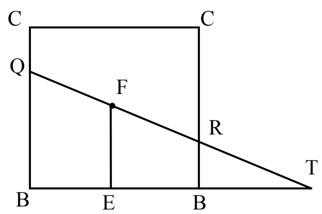


Рис. 7

Выполним построение «методом следов». Для этого определим следы секущей плоскости (обозначим её α) на гранях куба. $M \in \alpha$, $N \in \alpha$, следовательно и вся прямая MN принадлежит плоскости α. Эта прямая и есть след секущей плоскости на грани ABA_1B_1 куба (см. рис. 7). Пусть прямая MN пересекает прямую BB_1 в точке T, тогда, так как $T \in (MN)$, а $(MN) \in \alpha$, то $T \in \alpha$. Однако точка T принадлежит ещё и прямой BB_1, а значит и грани BCC_1B_1 куба. Этой же грани принадлежит и данная точка F, а потому и вся прямая TF. Так как $T \in \alpha$ и $F \in \alpha$, то $(TF) \in \alpha$ и потому прямая TF является следом плоскости α на грани BCC_1B_1 куба. Пусть $(TF) \cap (BC) = R$, $(TF) \cap (B_1C_1) = Q$. Так как $(TF) \in \alpha$, то $R \in \alpha$ и $Q \in \alpha$. Поскольку точки M и R принадлежат плоскости α, а также грани $ABCD$ куба, то прямая MR является следом секущей плоскости. Пусть $(MR) \cap (AD) = S$, тогда $S \in \alpha$ и S лежит на грани ADD_1A_1 куба. Но на этой грани уже есть точка N, также лежащая в плоскости α. Поэтому $(SN) \in \alpha$ и прямая SN является следом секущей плоскости на грани ADD_1A_1 куба. Пусть $(SN) \cap (A_1D_1) = P$. Так как $(SN) \in \alpha$, то и $P \in \alpha$. Но $P \in (A_1B_1C_1D_1)$, и этой же грани принадлежит точка $Q \in \alpha$, значит прямая PQ является следом секущей плоскости α на грани $A_1B_1C_1D_1$ куба. Итак, построены все следы секущей плоскости на гранях куба и $MNPQR$ – искомое сечение.



Вычислим теперь отношение, в котором плоскость α делит ребро BC куба. Так как $AM = BM$ и $\angle AMN = \angle BMT$ (как вертикальные), то прямоугольные треугольники AMN и BMT равны по стороне и двум углам. Значит, $BT = AN$. Пусть ребро куба равно a, тогда $BT = AN = a/2$. Ясно, что если $FE \perp BB_1$, то FE тоже равно $a/2$. Тогда из подобия прямоугольных треугольников FET и RBT следует, что $BR : EF = BT : ET = \frac{a}{2} : a = \frac{1}{2}$.

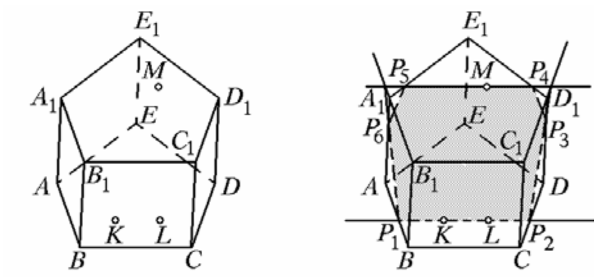
Итак, $BR = \frac{1}{2} EF = \frac{1}{2}\frac{a}{2} = \frac{a}{4}$, и потому $BR : BC = \frac{a}{4} : a = \frac{1}{4}$.

Приведем теперь пример использования для обоснования построения сечения теоремы о линиях пересечениях двух параллельных плоскостей третьей плоскостью.

если две параллельные плоскости пересечены третьей плоскостью, то прямые пересечения параллельны.

Эту теорему довольно естественно использовать, когда речь идет о сечениях многогранников, имеющих параллельные грани: призм, параллелепипедов, кубов и т. д.

Пример 7. *Построить сечение призмы* $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ *плоскостью, проходящей через точки* K, L, M *(рис.8* a*), где* $K, L \in (ABC)$, $M \in (A_1B_1C_1)$.



а) **Рис. 8** **б)**

Сначала построим прямую KL – линию пересечения плоскостей KLM и ABC. Пусть эта прямая пересекает отрезки AB и CD в точках P_1 и P_2. Для того, чтобы построить след секущей плоскости на плоскости грани $A_1B_1C_1$, заметим, что плоскости ABC и $A_1B_1C_1$ параллельны (по определению призмы), поэтому линия пересечения секущей плоскости и плоскости $A_1B_1C_1$ должна быть параллельна прямой KL (и, конечно, проходит через точку M). Строим прямую, проходящую через точку M параллельно прямой KL до пересечения с отрезками A_1E_1 и E_1D_1 в точках P_5 и P_4. Дальнейшее построение аналогично построению примера 6. Сечение изображено на рис. 8 $б$.

а)

Теоремы о параллельности в пространстве применяют и в случае, когда одним из условий задания секущей плоскости является ее параллельность некоторой прямой, некоторой плоскости или двум скрещивающимся прямым. Построение сечения в следующей задаче основано на следующей теореме:

если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то прямая пересечения плоскостей параллельна данной прямой.

Пример 8. *На ребре* AD *тетраэдра взята точка* M *так, что* $DM : AD = \lambda$, $0 < \lambda < 1$ *(см. рис. 9). Построить сечение тетраэдра* $ABCD$ *плоскостью* α, *проходящей через точку* $M \in AD$ *параллельно прямым* AB *и* CD, *если* $AB : CD = m$. *При каком* λ *это сечение будет ромбом.*

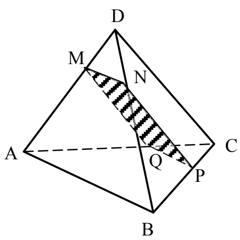


Рис. 9

Вначале выполним построение сечения (см. рис. 9). Так как плоскость сечения параллельна прямой AB, то линия MN пересечения плоскости α с плоскостью ABD параллельна прямой AB (здесь $N \in BD$). Так как плоскость сечения параллельна прямой CD, то α пересекает плоскости ACD и BCD по прямым

MQ ($Q \in AC$) и NP ($P \in BC$), параллельным прямой CD. Так как $Q \in \alpha$ и $P \in \alpha$ ($P, Q \in (ABC)$), то $(PQ) \in \alpha$, и прямая PQ является следом секущей плоскости на грани ABC тетраэдра. Так как $\alpha \parallel AB$, то $PQ \parallel AB$ (почему?). Итак, четырёхугольник $MNPQ$ – искомое сечение. Так как $MN \parallel AB \parallel PQ$, а $PN \parallel CD \parallel MQ$, то сечение – параллелограмм. Обратим внимание, что сечение является параллелограммом все зависимости от положения точки M на ребре AD.

Вычислим длины сторон параллелограмма $MNPQ$ через длины рёбер AB и CD тетраэдра. Так как треугольник ABD подобен треугольнику MND, то $MN : AB = DM : AB = \lambda$, значит, $MN = \lambda AB$. Имеем,

$$AM = AD - DM = (1-\lambda)AD.$$

Из подобия треугольников AMQ и ADC находим $MQ : CD = AM : AD = 1 - \lambda$, то есть $MQ = (1-\lambda)CD$. Сечение $MNPQ$ будет ромбом, если $MN = MQ$. Подставляя в это равенство найденные выражения для длин сторон параллелограмма получаем $\lambda AB = (1-\lambda)CD$, откуда

$$\lambda = \frac{CD}{AB + CD} = \frac{1}{m+1}.$$

Важные выводы. 1). *Сечение тетраэдра плоскостью, параллельной двум её скрещивающимся рёбрам всегда является параллелограммом.*

2). *Если противоположные рёбра AB и CD тетраэдра перпендикулярны, то параллельные им стороны MN и MQ сечения также перпендикулярны. В этом случае сечение – прямоугольник, а при $\lambda = \frac{1}{m+1}$ – квадрат.*

3). *Если тетраэдр $ABCD$ правильный (как известно, его противоположные рёбра перпендикулярны), то $m = 1$ и $\lambda = 1/2$. Значит, сечение, являющееся квадратом, проходит через середины рёбер этого тетраэдра.*

Пример 9. *Построить сечение призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью α, проходящей через точку O пересечения диагоналей AC_1 и CA_1 параллельно плоскости $\beta = (AB_1C)$. Найти отношение площадей сечений призмы плоскостями α и β.*

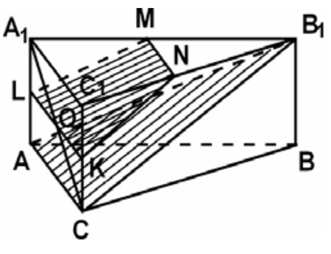


Рис. 10

По условию $\alpha \parallel \beta$, поэтому α и β пересекают грани призмы по параллельным прямым. Следовательно, α пересекает грань AA_1C_1C по отрезку KL, где K и L – середины рёбер

CC_1 и AA_1 соответственно (рис. 10), так как $KL \parallel AC$ и KL проходит через точку пересечения диагоналей параллелограмма AA_1C_1C. Аналогично, α пересекает грань AA_1B_1B по отрезку LM, где M – середина ребра A_1B_1. Аналогично, α пересекает ребро B_1C_1 в его середине N. Сечение – трапеция $KLMN$ ($MN \parallel A_1C_1 \parallel KL$).

Как мы доказали, $LM \parallel AB_1$ и $LK \parallel AC$, поэтому $\angle MLO = \angle B_1AC$, кроме того, $ML : B_1A = OL : CA = 1:2$. Следовательно, треугольники MLO и B_1AC подобны с коэффициентом $k = \frac{1}{2}$. Отсюда высота h_1, опущенная из точки M на OL в два раза меньше высоты h, опущенной из точки B_1 на CA. Значит,

$$\frac{S_\alpha}{S_\beta} = \left(\tfrac{1}{2} h_1 \left(MN + KL\right)\right) : \left(\tfrac{1}{2} h \cdot CA\right) = \tfrac{3}{4}.$$

Пример 8. *Построить сечение правильной четырехугольной пирамиды* $SABCD$ *плоскостью* α, *проходящей через точки* C *и* M *параллельно ребру* SD, *где* M *– середина ребра* DA. *Определить, в каком отношении плоскость* α *делит высоту пирамиды, а также ребра, которые она пересекает.*

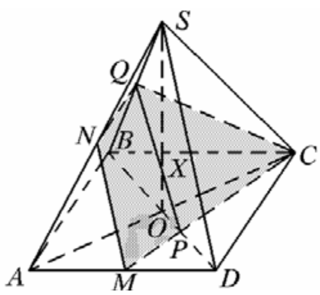


Рис. 11

Так как прямая SD параллельна α и SD лежит в плоскости ASD, то α пересекает плоскость ASD по прямой, параллельной SD (рис. 11). Значит α пересекает грань ASD по отрезку MN, где N – середина SA. Аналогично α пересекает плоскость BSD по прямой PQ, параллельной SD, где P – точка пересечения прямых CM и BD, так как $CM \in \alpha$ и $BD \in (BSD)$. Соединив точку Q с точками N и C, получаем искомое сечение $MNCQ$. Как мы показали выше, N – середина ребра AS. Далее, в треугольнике ACD P – точка пересечения медиан ($AO = OC$ и $DM = MA$), поэтому $DP = \dfrac{2}{3}DO = \dfrac{1}{3}DB$. Из подобия треугольников BSD и BQP получаем, что $BQ : BS = BP : BD = 2:3$. Наконец, отношение $SX : XO$, где X – точка пересечения SO и плоскости α, т.е. $X = SO \cap PQ$, найдем, воспользовавшись известной из планиметрии теоремой Менелая.

Теорема (*Менелай*[2]) *Пусть в треугольнике ABC на сторонах BC, CA лежат точки* A_1*, и* B_1 *соответственно, а точка* C_1 *лежит на продолжении стороны AB за точку B; тогда для того, чтобы эти точки лежали на одной прямой, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\boxed{\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=1.} \qquad (*)$$

Доказательство.

Необходимость. Пусть точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой. Проведём прямую BK параллельно прямой AC (см. рис). Тогда треугольники C_1BK и C_1AB_1, а также треугольники BKA_1 и CB_1A_1, подобны (почему?). Запишем это подобие для треугольников C_1BK и C_1AB_1:

$$\frac{BK}{AB_1}=\frac{BC_1}{C_1A}\Rightarrow BK=AB_1\cdot\frac{BC_1}{C_1A}.$$

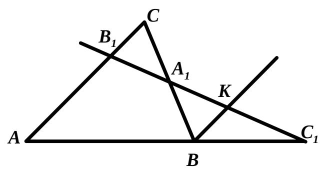
Для треугольников BKA_1 и CB_1A_1:

$$\frac{BK}{B_1C}=\frac{A_1B}{CA_1}\Rightarrow BK=B_1C\cdot\frac{A_1B}{CA_1}.$$

Приравнивая полученные выражения для BK, имеем

$$AB_1\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=B_1C\cdot\frac{A_1B}{CA_1}\Rightarrow\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=1.$$

Достаточность. Пусть выполнена формула (*), докажем, что точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой. Пусть прямая B_1A_1 пересекает прямую AB в точке C_2. Тогда, поскольку три точки A_1, B_1 и C_2 лежат на одной прямой, то по только что доказанному: $\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_2}{C_2A}=1.$ Из сравнения последней формулы с формулой (*), получаем $\frac{BC_1}{C_1A}=\frac{BC_2}{C_2A}$.



Откуда следует, что точки C_1 и C_2 в одинаковом отношении делят отрезок AB. Следовательно точки C_1 и C_2 совпадают. Теорема доказана.

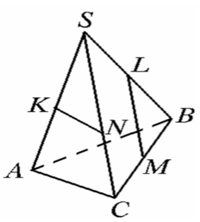
Согласно этой теореме, примененной к треугольнику BSO и прямой

[2]**Менелай** Александрийский (Μενέλαος) (1 в. н. э.) – древнегреческий математик и астроном. Автор работ по сферической тригонометрии: 6 книг о вычислении хорд и 3 книги «Сферики» (сохранились в арабском переводе). Для получения формул сферической геометрии использовал теорему о прямой, пересекающей стороны треугольника.

PXQ, получаем: $\frac{SX}{XO}\cdot\frac{OP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QS}=1$, т.е. $\frac{SX}{XO}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{1}=1$, откуда $\frac{SX}{XO}=2$.

Пример 10. *Плоскость α пересекает ребра AS, SB и BC пирамиды $SABC$. Докажите, что α пересекает ребро CA.*

Первый способ: $\alpha = (KLM)$. Плоскость α делит пространство на два полупространства Π_1 и Π_2. Из условия следует, что если $A \in \Pi_1$, то $S \in \Pi_2$, далее $S \in \Pi_2 \Rightarrow B \in \Pi_1 \Rightarrow C \in \Pi_2$. Итак, A и C в разных полупространствах, поэтому отрезок AC пересекает α.

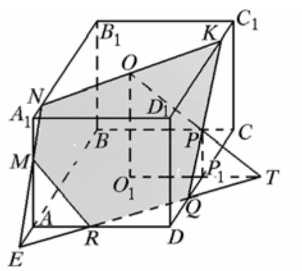


Второй способ: Пусть $K = \alpha \cap AS$, $L = \alpha \cap SB$, $M = \alpha \cap BC$. Плоскость α пересекает ребро AS, значит она пересекает грань ASC. Если α не пересекает ребро AC, то она пересекает ребро SC в точке N. Но тогда, по признаку, прямые NK и LM – скрещиваются и не могут лежать в одной плоскости.

§ 3. Применение проеtктирования при построении сечений

В примерах, разобранных выше, следы секущей плоскости находились достаточно легко, что объясняется наличием двух точек в плоскости одной грани многогранника, принадлежащих также плоскости сечения. Теперь мы рассмотрим более сложные ситуации.

Пример 11. *Построить сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью α, проходящей через центры O и P граней $A_1B_1C_1D_1$ и CC_1D_1D, а также через точку R на ребре DA такую, что $AR : RD = 4 : 3$. Найти площадь сечения, если $AB = a$.*



Никакая пара из заданных точек не лежит на одной грани куба (рис. 1). Воспользуемся параллельным проектированием для нахождения второй (кроме R) точки, принадлежащей α и $ABCD$. Пусть O_1 и P_1 – проекции на плоскость ABC в направлении бокового ребра куба точек O и P (см. рис. 13). Тогда $OO_1 \parallel PP_1 \parallel AA_1$ и следовательно точки O, O_1, P, P_1 лежат в одной плоскости. При этом $O, P \in \alpha$, $O_1, P_1 \in (ABCD)$. Поэтому точка $T = OP \cap O_1P_1$ лежит в плоскостях α и $(ABCD)$. Так же и $R \in \alpha \cap (ABCD)$. Отсюда следует, что прямая RT – след α на плоскости $(ABCD)$. и точка K пересечения

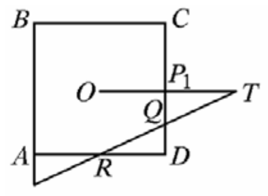


Рис. 13

прямых PQ и D_1C_1 лежит в α. Тогда KO – след α на плоскости $A_1B_1C_1$, $N = KO \cap A_1B_1$ – точка, принадлежащая α и плоскости AA_1B_1. Точка E также принадлежит этим плоскостям, поэтому EN – след α на AA_1B_1, и значит, $QRMNK$ – искомое сечение.

Для нахождения площади сечения заметим, что $S_\alpha = S_{QENK} - S_{REM}$.

Четырехугольник $QENK$ – параллелограмм, так как образован при сечении α с парами параллельных плоскостей. Кроме того, $KN = 2KO = 2KP = KQ$, поэтому $QENK$ – ромб, его площадь S_1 можно найти по формуле $S_1 = \frac{1}{2}d_1d_2$, где $d_1 = NQ$, $d_2 = KE$. Из того, что O и P – центры граней, следует: $A_1N = KC_1 = QD$, поэтому NA_1DQ – параллелограмм (из того, что $B_1A_1 \perp AA_1D_1$ следует, что NA_1DQ – прямоугольник), поэтому $d_1 = NQ = A_1D = a\sqrt{2}$. Для нахождения d_2 определим положение вершин сечения на ребрах куба. Из подобия треугольников

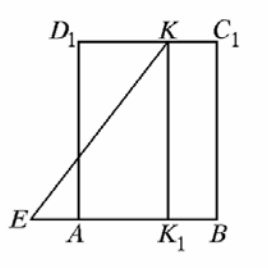


Рис. 14

TPP_1 и TOO_1 с коэффициентом $k = PP_1 : OO_1 = \frac{1}{2}$ следует, что $TP_1 = \frac{1}{2}TO_1$, т.е. $TP_1 = P_1O_1 = \frac{a}{2}$. Теперь из подобия треугольников TP_1Q и RDQ (рис. 13) получаем: $P_1Q : QD = TP_1 : RD = \frac{a}{2} : \frac{3a}{7} = 7 : 6$, т.е. $QD = \frac{6}{13}P_1D = \frac{3a}{13}$. Из подобия треугольников QDR и EAR получаем: $AE : DQ = AR : DR = 4 : 3$, $AE = \frac{4a}{13}$. Аналогично рассуждая, получаем, что $AM = \frac{4a}{7}$ (впрочем, можно было воспользоваться симметрией куба и рассматриваемого сечения относительно плоскости ABC_1). Из рис. 14, где $KC_1 = DQ = \dfrac{3a}{13}$, получаем

$$EK_1 = AE + AB - K_1B = \frac{4a}{13} + a - \frac{3a}{13} = \frac{14a}{13},$$

$KK_1 = AD_1 = a\sqrt{2},$ т.е. $KE = \sqrt{\frac{196a^2}{169} + 2a^2} = \frac{\sqrt{534}}{13}a.$ Значит, $S_1 = \frac{1}{2}d_1 d_2 = \frac{\sqrt{267}}{13}a^2.$ Для нахождения $S_{REM} = S_2$ заметим, что треугольники REM и QEN подобны с коэффициентом $k_1 = RE : QE = RA : DA = 4:7.$ Поэтому

$$S_2 = \left(\tfrac{4}{7}\right)^2 S_{QEN} = \left(\tfrac{4}{7}\right)^2 \tfrac{1}{2} S_1 = \tfrac{8}{49} S_1.$$

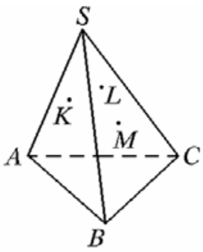
Итак, $S_\alpha = \frac{41}{49} S_1 = \frac{41\sqrt{267}}{637} a^2.$

Параллельное проектирование удобно использовать при построении сечений призм (в частности, параллелепипедов, кубов). При этом, как правило, в качестве плоскости проектирования выбирают плоскость основания призмы, а за направление проектирования – направление бокового ребра призмы.

При построении сечений пирамид удобно пользоваться *центральным проектированием.*

Определение. Пусть в пространстве заданы плоскость α (*плоскость проектирования*) и не принадлежащая ей точка S (*центр проектирования*). *Центральной проекцией* точки M называется точка M' пересечения прямой SM с плоскостью α, если она существует.

Замечание. Согласно данному определению точки, лежащие в плоскости, проходящей через центр проектирования параллельно плоскости проектирования, не имеют проекций.



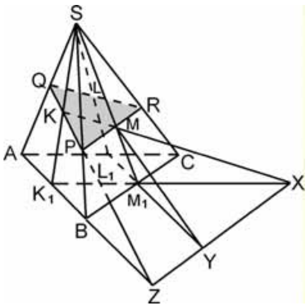


Рис. 15

Пример 12. *Построим сечение пирамиды* $SABC$ *плоскостью* KLM *(рис. 15а), где* $K \in (ASB)$, $L \in (ASC)$, $M \in (BSC)$.

Построим центральные проекции (центр проектирования – точка S) точек K, L, M на плоскости ABC. Пусть это будут точки K_1, L_1, M_1 (рис. 15б). Построим точки пересечения прямых KM и $K_1M_1 (X)$, LM и $L_1M_1 (Y)$. Тогда прямая XY – след α на плоскости ABC. Пусть прямые XY и AB пересекаются в точке Z (на рис. точка Z лежит на продолжении BA в точку B). Значит KZ – след α на плоскости

ASB и точки P и Q – точки пересечения ребер SA и SB с прямой KZ – вершины сечения. Наконец, QL – след α на плоскости ASC. Треугольник PQR – искомое сечение.

§ 4. Перпендикулярность прямых и плоскостей.

Определения перпендикулярных прямых, перпендикулярной прямой и плоскости, перпендикулярных плоскостей даны в школьном учебнике геометрии. Перечислим самые важные теоремы, которые используются при решении задач: *признак перпендикулярности прямой и плоскости, теорема о трех перпендикулярах*, *признак перпендикулярности плоскостей.* Формулировки этих теорем можно найти в учебнике.

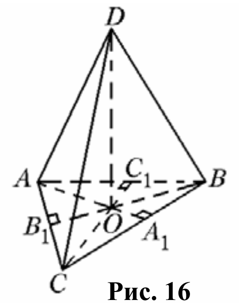


Рис. 16

Пример 13. *Ребра AB и CD, AD и BC тетраэдра перпендикулярны. Докажите, что ребра AC и BD также перпендикулярны.*

Опустим из точки D перпендикуляр DO на плоскость ABC (рис. 16). По теореме о трех перпендикулярах из того, что $CD \perp AB$ следует, что $CO \perp AB$, т.е. точка O лежит на прямой, содержащей высоту CC_1 треугольника ABC. Аналогично, точка O лежит на прямой, содержащей высоту AA_1 и, значит, O – ортоцентр (точка пересечения высот) треугольника ABC. Следовательно, $BO \perp AC$ и по теореме о трех перпендикулярах $BD \perp AC$.

Пример 14. *Доказать, что прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является кубом тогда и только тогда, когда $B_1D \perp A_1BC_1$.*

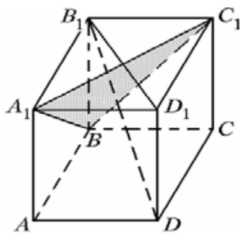


Рис. 17

Если $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб (рис.17), то $A_1C_1 \perp D_1B_1$, но D_1B_1 — проекция наклонной DB_1 на плоскость $A_1B_1C_1$, следовательно, по теореме о трех перпендикулярах $DB_1 \perp A_1C_1$. Аналогично $DB_1 \perp A_1BC_1$. Обратно, если $DB_1 \perp A_1BC_1$, то $DB_1 \perp A_1C_1$ и по теореме о трех перпендикулярах $D_1B_1 \perp A_1C_1$. Но диагонали прямоугольника перпендикулярна, если он является квадратом, значит $A_1B_1 = B_1C_1$. Аналогично $A_1B_1 = BB_1$, т.е. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб.

Пример 15. *Постройте сечение куба* $ABCDA_1B_1C_1D_1$*, проходящее через точку* B *перпендикулярно прямой* DB_1*, и определите, в каком отношении плоскость сечения делит эту прямую.*

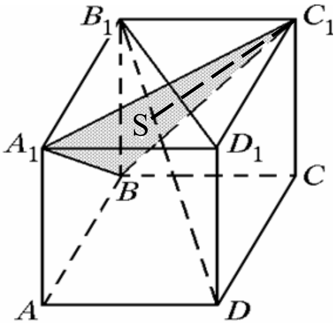


Рис. 18

Результат предыдущего примера показывает, что искомым сечением является треугольник A_1BC_1. Пусть плоскость сечения пересекает прямую DB_1 в точке S (см. рис. 18). Найдём отношение $SB_1 : DB_1$.

Пусть сторона куба равна a. Тогда, как известно, длина главной диагонали куба равна $DB_1 = a\sqrt{3}$ (можете ли вы это доказать?). Так как $A_1BC_1 \perp DB_1$, то $DB_1 \perp SA_1$, $DB_1 \perp SC_1$, $DB_1 \perp SB$. Поэтому $\Delta B_1SA_1 = \Delta B_1SC_1 = \Delta B_1SB$ по трём сторонам, и, следовательно, точка S является центром правильного треугольника C_1BA_1. Сторона этого треугольника равна $a\sqrt{2}$ (почему?), значит $SC_1 = \frac{A_1C_1}{\sqrt{3}} = a\sqrt{\frac{2}{3}}$. Наконец, из прямоугольного треугольника SB_1C_1 находим

$$SB_1 = \sqrt{B_1C_1^2 - SC_1^2} = \sqrt{a^2 - \tfrac{2}{3}a^2} = \tfrac{a}{\sqrt{3}} = \tfrac{1}{3}a\sqrt{3} = \tfrac{1}{3}DB_1.$$

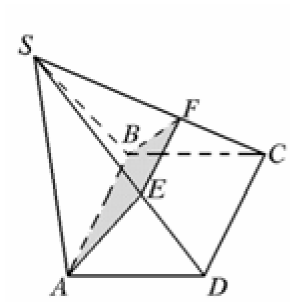
Итак, $\frac{SB_1}{DB_1} = \frac{1}{3}$.

Важный вывод. Ясно, что сечение куба, проходящее через точки A, C и D_1 также перпендикулярно прямой DB_1, кроме того, $\frac{FD}{DB_1} = \frac{1}{3}$, где F – точка пересечения плоскости ACD_1 с прямой DB_1. Полезно помнить, что *плоскости* C_1BA_1 *и* ACD_1 *рассекают куб по правильным треугольникам и делят главную диагональ этого куба на три равные части.*

Пример 16. *В основании четырехугольной пирамиды* $SABCD$ *лежит прямоугольник* $ABCD$ *со сторонами* $AB = a$, $AD = b$, *ребро* SA *перпендикулярно основанию пирамиды,* $SA = c$. *Найти: а) расстояние от точки* A *до плоскости* SCD; *б) площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку* A *перпендикулярно ребру* SD.

а) По определению *расстоянием от точки до плоскости является длина перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость.*

Покажем, что перпендикуляр, опущенный из точки A на ребро SD является перпендикуляром к плоскости SCD (рис. 19). Действительно, по условию $SA \perp ABC \Rightarrow CD \perp SA$, кроме того, $CD \perp DA$, поэтому по признаку перпендикулярности прямой и плоскости $CD \perp SAD \Rightarrow CD \perp AE$. Но по построению $AE \perp SD$, т.е. прямая AE перпендикулярна пересекающимся прямым CD и SD, следовательно, $AE \perp CSD$. Длину отрезка AE найдем, дважды вычислив площадь треугольника SAD:



$$\tfrac{1}{2} SA \cdot AD = \tfrac{1}{2} AE \cdot SD \Rightarrow AE = \frac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}}.$$

Рис. 19

б) В пункте а) мы показали, что $AE \perp SD$ и $CD \perp SAD$, где $CD \perp SD$. Значит, искомое сечение — трапеция $AEFB(EF \parallel CD \parallel AB)$. Эта трапеция – прямоугольная, т. к. $EF \parallel CD$, а $CD \perp AE$, т. е.

$$h = AE = \frac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}}.$$

Из подобия треугольников ASE и DSA имеем:

$$SE = AS^2 : SD = c^2 : \sqrt{b^2+c^2},$$

а из подобия треугольников SEF и SDC:

$$EF = (CD \cdot SE) : SD = \frac{ac^2}{b^2+c^2}.$$

Таким образом,

$$S_\alpha = \frac{1}{2}(EF + AB)AE = \frac{abc}{2\sqrt{b^2+c^2}}\left(\frac{c^2}{b^2+c^2}+1\right).$$

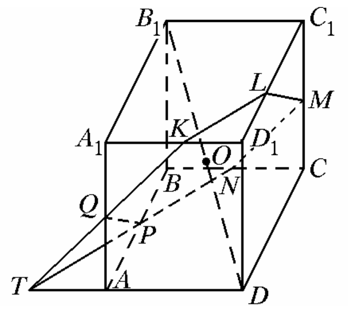


Рис. 20

Пример 17. *Доказать, что сечение куба плоскостью, перпендикулярной его главной диагонали и проходящей через центр куба, — правильный шестиугольник.*

Пусть $K, L, M, N, P, Q -$ середины ребер A_1D_1, D_1C_1, C_1C, CB, BA, AA_1 соответственно (рис. 20). Покажем, что эти точки лежат в плоскости сечения. Из равенства прямоугольных треугольников B_1A_1K и DD_1K (по двум катетам) следует, что $B_1K = DK$. Поэтому если $O-$ центр куба, то $KO -$ медиана равнобедренного треугольника B_1KD, следовательно

$KO \perp B_1D$, т.е. KO лежит в плоскости α. Аналогично и остальные вершины шестиугольника $KLMNPQ$ лежат в плоскости α. Длины всех сторон шестиугольника $\frac{a}{\sqrt{2}}$, где $a-$длина ребра куба. Далее, если $T-$точка пересечения α и прямой AD, то из равенства треугольников KA_1Q и TAQ, NBP и TAP следует, что $PT = QT = \frac{a}{\sqrt{2}}$, т.е. треугольник PTQ равносторонний. Отсюда $\angle NPQ = 180° - \angle TPQ = 120°.$ Аналогично и другие углы шестиугольника $KLMNPQ$ равны $120°$, т.е. все стороны и углы шестиугольника равны между собой, следовательно, он правильный.

Пример 18. *Для правильной четырехугольной пирамиды* $SABCD$ *вычислить:* а) *расстояние от вершины* A *до плоскости* SCD, *если* $AB = a$, $DS = b$; б) *наибольшее возможное значение угла между ребром* SA *и плоскостью* SCD.

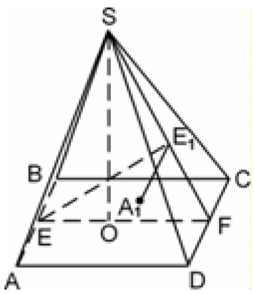


Рис. 21

а) В этом примере перпендикуляр, опущенный из точки A на плоскость SCD, не попадает на прямую SD (рис. 21). Действительно, $AB \parallel CD$ и значит $AB \parallel SCD$, поэтому расстояние h от любой точки прямой AB до плоскости SCD одно и то же. Пусть E и F — середины ребер AB и CD. Покажем, что если $EE_1 \perp SF$, то $EE_1 \perp SCD$ (*вспомогательные сечения типа* SEF, SAC *очень часто используются при решении стереометрических задач!*). Высота SO пирамиды перпендикулярна прямой DC, лежащей в плоскости ее основания. Кроме того, $EF \perp DC$, и значит, $DC \perp SEF$, откуда $DC \perp EE_1$. Но по построению $EE_1 \perp SF$, таким образом, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости $EE_1 \perp SCD$. Теперь можно определить положение проекции A_1 точки A на плоскость SCD: четырехугольник AEE_1A_1 — прямоугольник, поэтому $E_1A_1 = AE = DF$, т.е. A_1 лежит вне треугольника SCD. Рассмотрим площадь треугольника SEF, получаем $\frac{1}{2}SO \cdot EF = \frac{1}{2}EE_1 \cdot SF$, откуда

$$EE_1 = a\left(\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}}\right) : \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}.$$

б) *Углом между прямой и плоскостью является угол между прямой и ее ортогональной проекцией на плоскость.* Поэтому искомый угол φ — это $\angle ASA_1$, т.е. $\sin\varphi = \frac{AA_1}{AS} = \frac{EE_1}{AS} = \frac{a\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}}}{b\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}}$. Введем безразмерную переменную $x = \frac{a}{b}$, тогда $\sin\varphi = x\frac{\sqrt{1-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}$. Пусть $t = x^2$, большему значению $\sin\varphi$ соответствует (в силу $\sin\varphi > 0$) большее значение $f(t) = \sin^2\varphi = 2t\frac{2-t}{4-t}$. Имеем:

$$f'(t) = 2\left(\frac{2t - t^2}{4-t}\right)' = 2\frac{(2-2t)(4-t) - (2t - t^2)(-1)}{(4-t)^2} = 2\frac{t^2 - 8t + 8}{(4-t)^2} =$$

$= 2\frac{(t-t_1)(t-t_2)}{(4-t)^2}$, где $t_1 = 4 - 2\sqrt{2}, t_2 = 4 + 2\sqrt{2}$. Трехчлен $(t-t_1)(t-t_2)$ меняет знак с «+» на «–» в точке t_1, причем $t_1 \in (0;\sqrt{2})$, поэтому $\max f(t) = f(t_1) = 2(2-\sqrt{2})^2$.

Итак, $\max\sin\varphi = \sqrt{2}(2-\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 2$ и $\max\varphi = \arcsin(2\sqrt{2} - 2)$.

Пример 19. *Точка M — середина ребра D_1D куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a. Найти угол и расстояние между прямыми A_1C_1 и CM.*

Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между пересекающимися прямыми, параллельными данным. Пусть N — середина ребра BB_1 (рис. 22), тогда $A_1N \parallel CM$ и значит $\varphi = \angle NA_1C_1$ — искомый.

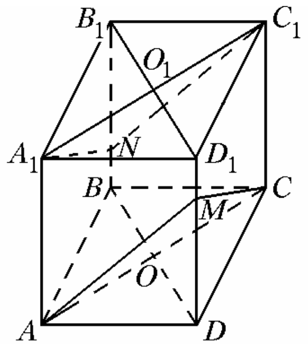


Рис. 22

Из треугольника A_1NC_1 со сторонами

$$A_1C_1 = a\sqrt{2},\ A_1N = C_1N = a\frac{\sqrt{5}}{2}$$

получаем: $\cos\varphi = \left(\frac{1}{2}A_1C_1\right)/A_1N = \sqrt{\frac{2}{5}}, \varphi = \arccos\sqrt{\frac{2}{5}}$. *Расстоянием h между скрещивающимися прямыми l_1 и l_2 называется длина наименьшего из отрезков с концами данных прямых.*

Утверждение 1. h — длина общего перпендикуляра к l_1 и l_2.

Утверждение 2. h — расстояние между параллельными плоскостями, содержащими данные прямые.

Согласно признаку параллельности плоскостей из того, что $A_1C_1 \parallel AC$ и $A_1N \parallel CM$, следует, что $(A_1C_1N) \parallel (ACM)$. Это и есть параллельные плоскости, содержащие скрещивающиеся прямые A_1C_1 и CM. Поэтому h — расстояние между плоскостями, что то же самое, расстояние от точки N до плоскости ACM. Докажем, что эта длина перпендикуляра NN_1, опущенного из точки N на прямую MO, где O — центр грани $ABCD$. Действительно, $AC \perp D_1D$ и кроме того, $AC \perp BD$. Поэтому $AC \perp BB_1D_1D$, в этой плоскости лежит прямая NN_1, поэтому, в частности, $AC \perp NN_1$, т.е. прямая NN_1 перпендикулярна прямым AC и MO, т.е. плоскости ACM. Рассмотрим вспомогательное сечение BB_1D_1D (рис.23). Пусть T — точка пересечения прямых MO и BB_1. Тогда из $\Delta TBO = \Delta MDO$ следует $TB = MD = \dfrac{a}{2}$, откуда $NT = a$. Теперь из подобия треугольников NTN_1 и O_1NB_1 получаем $NN_1 : O_1B_1 = NT : O_1N$, где

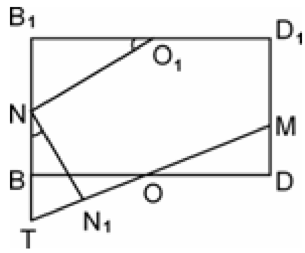


Рис. 23

$$O_1N = a\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow h = NN_1 = a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Пример 20. *Построить сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через прямую AD_1 перпендикулярно плоскости* A_1BC_1.

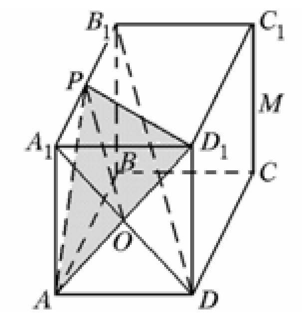


Рис. 24

Утверждение. *Две плоскости перпендикулярны тогда и только тогда, когда одна из них про-*

ходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости. (В одну сторону это утверждение называется «признак перпендикулярности плоскостей»).

Таким образом, нам достаточно пересечь прямую AD_1 какой-либо прямой, перпендикулярной плоскости A_1BC_1 (рис. 24). В примере 14 мы показали, что $DB_1 \perp A_1BC_1$, поэтому нужно построить прямую l, $l \parallel DB_1$, перпендикулярную AD_1. Как легко показать, в качестве l можно взять OP — среднюю линию треугольника DA_1B_1 (во-первых, $OP \parallel DB_1$, во-вторых, $O \in AD_1$). Треугольник APD_1 — искомое сечение.

Пример 21. *Постройте сечение правильной треугольной пирамиды $SABC$ плоскостью, проходящей через точку M ребра SA перпендикулярно высоте CN основания пирамиды. Вычислите площадь этого сечения, если $AB = 2$, $AM = MS$, а высота пирамиды равна 4.*

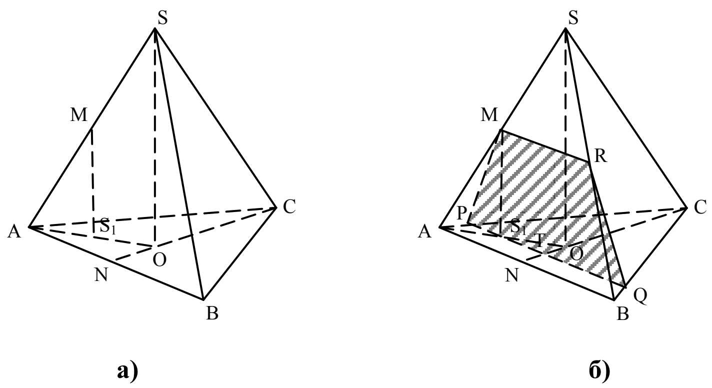


Рис. 25

Обозначим секущую плоскость через α. Так как $CN \perp \alpha$, то и $ABC \perp \alpha$. Следовательно, перпендикуляр, опущенный из точки M на плоскость ABC принадлежит плоскости α. Ясно, что этот перпендикуляр параллелен высоте SO пирамиды. Значит, что для построения сечения нужно построить высоту пирамиды и провести $MS_1 \parallel SO$ (см. рис 25а). Так как $AM = MS$, то и $AS_1 = S_1O$. Сторона сечения, лежащая на грани ABC перпендикулярна высоте CN основания и потому параллельна ребру AB. Проведём через точку S_1 прямую $PQ \parallel AB$ (см. рис. 25б). Из параллельности PQ и AB следует, что и сторона сечения, лежащая на грани ASB параллельна ребру AB. Построив $MR \parallel AB$, получим $MPQR$ – искомое сечение. Так как

$PQ \parallel AB \parallel MN$, то сечение – трапеция, а ввиду симметрии пирамиды относительно плоскости SCN, эта трапеция является равнобокой.

Найдём теперь её площадь. Так как точка M – середина ребра AS, то $MS_1 = \frac{1}{2}SO = 2$ – высота трапеции $MPQR$. Кроме того, MN – средняя линия треугольника ASB и потому $MN = \frac{1}{2}AB = 1$. Так как $PQ \parallel AB$, то длину отрезка PQ можно найти из подобия треугольников ABC и PQC: $PQ : AB = CT : CN$, где $T = CN \bigcap PQ$. В правильном треугольнике ABC имеем: $CN = \frac{\sqrt{3}}{2}AB = \sqrt{3}$, $ON = \frac{1}{3}CN = \frac{1}{\sqrt{3}}$. По теореме Фалеса для угла AON: $TO : NT = OS_1 : S_1A = 1:1$, поэтому $NT = \frac{1}{2}ON = \frac{1}{2\sqrt{3}}$. Следовательно, $CT = CN - NT = \sqrt{3} - \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{5}{2\sqrt{3}}$. Итак, $PQ : AB = CT : CN = \frac{5}{2\sqrt{3}} : \sqrt{3} = \frac{5}{6}$. Значит, $PQ = \frac{5}{6}AB = \frac{5}{3}$. Вычислим, наконец, площадь сечения:

$$S_{сеч} = \frac{1}{2}\left(PQ + MQ\right)\cdot MS_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{3} + 1\right)\cdot 2 = \frac{8}{3}.$$

Ответ: $S_{сеч} = \frac{8}{3}$.

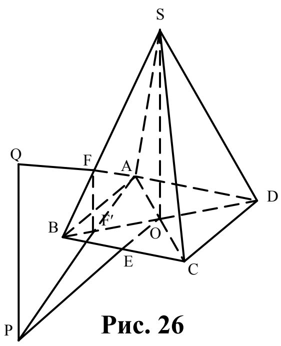


Рис. 26

Пример 22. *Параллелограмм $ABCD$ является основанием четырёхугольной пирамиды $SABCD$, высота которой проходит через точку пересечения диагоналей основания. На ребре BS выбрана точка F, а на ребре BC – точка E так, что $BF = \frac{1}{4}BS$, $BE = \frac{1}{3}BC$. На прямой AF взята точка Q, а на прямой OE – точка P так, что отрезок PQ перпендикулярен плоскости $ABCD$. Найдите длину высоты пирамиды $SABCD$, если $PQ = 12$.*

Указанная конфигурация изображена на рис. 26. На этом рисунке точка F' – проекция точки F на плоскость $ABCD$, O – точка пересечения диагоналей основания, SO – высота пирамиды. Тогда прямая AF проектируется на прямую AF', а поскольку отрезок PQ перпендикулярен плоскости $ABCD$, то прямая AQ проектируется на прямую AP, на которой и лежит точка F'. Из подобия треугольников BFF' и BSO следует, что $FF' : SO = BF : BS = 1:4$, а из подобия треугольников AFF' и AQP – $FF' : PQ = AF' : AP$. Итак, $SO = 4FF'$ и $FF' = \frac{AF'}{AP}PQ = 12\cdot\frac{AF'}{AP}$. Значит, $SO = 4FF' = 4\cdot 12\cdot\frac{AF'}{AP} = 48\cdot\frac{AF'}{AP}$. Таким образом, нам осталось найти лишь отношение $\frac{AF'}{AP}$. Рассмотрим «вид сверху» нашей конфигурации, то есть рассмотрим плоскость $ABCD$.

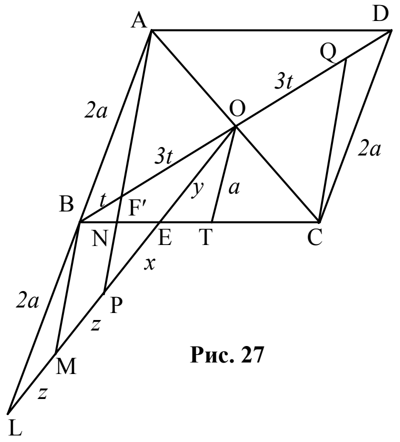


Рис. 27

Пусть длины сторон параллелограмма равны $AB = CD = 2a$ и $AD = BC = b$. Построим отрезок $OT \parallel AB$. Так как O – центр параллелограмма, то $OT = a$. Имеем $BT = b/2$, $BE = b/3$, и тогда

$$ET = b/2 - b/3 = b/6.$$

Продлим отрезок OP до пересечения в точке L с прямой AB. Треугольники OET и LEB подобны по двум углам и построим $BM \parallel AP$, следовательно $BL : OT = BE : ET = \frac{b}{3} : \frac{b}{6} = 2$, и значит $BL = 2a$. Для вычисления отношения $AF' : AP$ нам нужно решить так называемую «задачу о делении отрезка»: требуется вычислить в каком отношении отрезок BO делит отрезок AP. Стандартный метод решения такой задачи состоит в выполнении дополнительного построения. Построим отрезок $BM \parallel AP$. Так как $BL = AB$, то отрезок BM – средняя линия треугольника ALP, и значит $LM = LP = z$. Из подобия треугольников OET и LEB по двум углам получаем, что (обозначения см. на рис. 27)

$$\frac{BL}{PT} = \frac{2a}{a} = 2 = \frac{LE}{EO} = \frac{x+2z}{y}, \text{ откуда } y = z + \frac{x}{2}. \qquad (*)$$

С другой стороны, по теореме Фалеса для угла BEM, стороны которого пересечены параллельными прямыми BM и NP, имеем $\frac{z}{x} = \frac{MP}{PE} = \frac{BN}{NE}$. Последнее отношение легко найти по теореме Фалеса, применённой к углу CBQ, стороны которого пересечены параллельными прямыми AP и CQ:

$$\frac{BN}{BC} = \frac{BF'}{BQ} = \frac{t}{t+3t+3t} = \frac{t}{7t} = \frac{1}{7} \Rightarrow BN = \frac{BC}{7} = \frac{b}{7} \Rightarrow \frac{BN}{BE} = \frac{b/7}{b/3} = \frac{3}{7} \Rightarrow \frac{BN}{NE} = \frac{3}{4}.$$

Итак, $\frac{z}{x} = \frac{BN}{NE} = \frac{3}{4}$, поэтому из (*), получаем $\frac{y}{x} = \frac{z}{x} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$. Наконец, для поиска искомого отношения $AF' : F'P$ быстрее всего применить теорему Менелая к треугольнику ALP и прямой BO:

$$\frac{LB}{BA}\cdot\frac{AF'}{F'P}\cdot\frac{PO}{OL}=1\Rightarrow\frac{2a}{2a}\cdot\frac{AF'}{F'P}\cdot\frac{x+y}{x+y+2z}=1\Rightarrow\frac{AF'}{F'P}=\frac{x+y+2z}{x+y}=$$

$$=1+\frac{2z}{x+y}=1+\frac{2\frac{z}{x}}{1+\frac{y}{x}}=1+\frac{2\cdot\frac{3}{4}}{1+\frac{5}{4}}=1+\frac{3/2}{9/4}=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}.$$

Окончательно $\frac{AF'}{AP}=\frac{5}{8}$, и поэтому $SO=48\cdot\frac{AF'}{AP}=48\cdot\frac{5}{8}=30$.

Ответ: $SO=30$.

Контрольные вопросы

1(2). Пусть A, B, C, D – четыре точки пространства, не лежащие на одной прямой. Докажите, что отрезок, соединяющий середины K и M отрезков AB и CD соответственно, пересекается с отрезком, соединяющим середины L и N отрезков AD и BC соответственно. Докажите кроме того, что эти отрезки точкой своего пересечения делятся пополам.

2 а)(3). Какие многоугольники могут быть сечениями куба плоскостью?

б)(4). Какие правильные многоугольники могут быть сечениями куба плоскостью?

3(3). Докажите, что у любого тетраэдра существует сечение, являющееся ромбом. В каких отношениях плоскость этого сечения делит рёбра тетраэдра, которые она пересекает, если длины скрещивающихся рёбер тетраэдра равны a и b?

4(3). Боковое ребро пирамиды разделено на 100 равных частей и через точки деления проведены плоскости, параллельные основанию. Найдите отношение площадей наибольшего и наименьшего из получившихся сечений.

5(4). Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a. Постройте сечение куба плоскостью и найдите площадь сечения, если плоскость проходит через вершины A и D_1 и середину ребра BB_1. В каком отношении плоскость сечения делит ребро B_1C_1?

6(3). Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через точку A параллельно плоскости DBC_1. В каком отношении плоскость сечения делит диагональ CA_1 этого куба?

7(4). Постройте сечение правильной четырёхугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через вершину A и середины рёбер B_1C_1 и D_1C_1. Найдите площадь сечения, если $AB=1$, $AA_1=2$.

8(3). Построить сечение параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через точки $K \in AA_1$, $AK = \frac{1}{4}AA_1$; $L \in CC_1$, $C_1L = \frac{1}{4}CC_1$ параллельно диагонали BD нижнего основания параллелепипеда.

9(4). Постройте сечение правильного тетраэдра $SABC$ плоскостью, проходящей через точку M – середину ребра AS, точку N – центр грани BCS и точку P, лежащую на высоте BH треугольника ABC так, что $HP = 2BP$. В каком отношении плоскость сечения делит ребро AB?

Задачи

1(4). Длины двух противоположных перпендикулярных рёбер тетраэдра равны a и b. Расстояние между этими рёбрами равно c. В тетраэдр вписан куб, четыре ребра которого перпендикулярны этим двум рёбрам тетраэдра, а на каждой грани тетраэдра лежат ровно две вершины куба. Найдите ребро куба.

2(3). Доказать, что площадь ортогональной проекции многоугольника на плоскость равна произведению его площади на косинус угла между плоскостью многоугольника и плоскостью проекции.

3(5). Точки K и L расположены на диагоналях BA_1 и CB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ соответственно так, что отрезок KL параллелен грани $ABCD$ куба. Известно, что $KL : KB = \sqrt{5/8}$. Найти отношения $BK : BA_1$ и $CL : CB_1$.

4(5). Для правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ найдите: а) расстояние от вершины A до плоскости SEF и угол между ребром SA и плоскостью SEF, если $AB = a$, $SA = b$; б) наибольшее возможное значение угла между ребром SA и плоскостью SEF.

5(6). Сторона основания ABC правильной треугольной пирамиды $ABCD$ равна a, а боковое ребро равно b. Пирамиду пересекает плоскость α, параллельная рёбрам AD и BC. На каком расстоянии от ребра AD должна быть проведена плоскость α, чтобы площадь сечения пирамиды этой плоскостью была наибольшей?

6(8). (**МФТИ – 2000**) В правильной треугольной пирамиде $ABCD$ угол $\angle ADC = 2\arcsin(1/6)$, сторона основания ABC равна 2. Точки K, M, N – середины рёбер AB, CD, AC соответственно. Точка E лежит на отрезке KM и $3ME = KE$. Через точку E проходит плоскость π перпендикулярно отрезку KM. В каком отношении плоскость π делит рёбра пирамиды. Найти площадь сечения и расстояние от точки N до плоскости π.

7(7). (**МФТИ – 2004**)Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром длины 1. Найти:

а) площадь сечения куба плоскостью, проходящей через вершину B_1, середину ребра AD и параллельной прямой A_1C_1;

б) площадь сечения куба плоскостью, проходящей через вершину B_1 параллельной прямой A_1C_1, у которой площадь проекции сечения на плоскость A_1C_1A максимальна.

8(7). Правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ пересечена плоскостью, проходящей через середины рёбер AB, A_1C_1 и BB_1. Построить сечение призмы, найти площадь сечения и вычислить угол между плоскостью основания ABC и плоскостью сечения, если сторона основания равна 4, а высота призмы равна $\frac{\sqrt{42}}{7}$.

