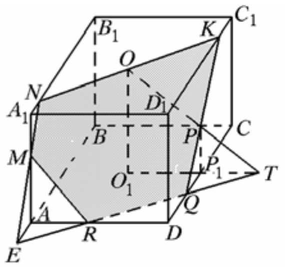
§ 3. Применение проеткирования при построении сечений

В примерах, разобранных выше, следы секущей плоскости находились достаточно легко, что объясняется наличием двух точек в плоскости одной грани многогранника, принадлежащих также плоскости сечения. Теперь мы рассмотрим более сложные ситуации.

Пример 11. *Построить сечение куба* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ *плоскостью* α*, проходящей через центры* O *и* P *граней* $A_1B_1C_1D_1$ *и* CC_1D_1D, *а также через точку* R *на ребре* DA *такую, что* $AR : RD = 4 : 3$. *Найти площадь сечения, если* $AB = a$.



Никакая пара из заданных точек не лежит на одной грани куба (рис. 1). Воспользуемся параллельным проектированием для нахождения второй (кроме R) точки, принадлежащей α и $ABCD$. Пусть O_1 и P_1 – проекции на плоскость ABC в направлении бокового ребра куба точек O и P (см. рис. 13). Тогда $OO_1 \parallel PP_1 \parallel AA_1$ и следовательно точки O, O_1, P, P_1 лежат в одной плоскости. При этом $O, P \in \alpha$, $O_1, P_1 \in (ABCD)$. Поэтому точка $T = OP \cap O_1P_1$ лежит в плоскостях α и $(ABCD)$. Так же и $R \in \alpha \cap (ABCD)$. Отсюда следует, что прямая RT – след α на плоскости $(ABCD)$. и точка K пересечения

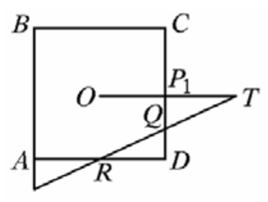


Рис. 13

прямых PQ и D_1C_1 лежит в α. Тогда KO – след α на плоскости $A_1B_1C_1$, $N = KO \cap A_1B_1$ – точка, принадлежащая α и плоскости AA_1B_1. Точка E также принадлежит этим плоскостям, поэтому EN – след α на AA_1B_1, и значит, $QRMNK$ – искомое сечение.

Для нахождения площади сечения заметим, что $S_\alpha = S_{QENK} - S_{REM}$.

Четырехугольник $QENK$ – параллелограмм, так как образован при сечении α с парами параллельных плоскостей. Кроме того, $KN = 2KO = 2KP = KQ,$ поэтому $QENK$ – ромб, его площадь S_1 можно найти по формуле $S_1 = \frac{1}{2}d_1d_2$, где $d_1 = NQ,\ d_2 = KE.$ Из того, что O и P – центры граней, следует: $A_1N = KC_1 = QD,$ поэтому NA_1DQ – параллелограмм (из того, что $B_1A_1 \perp AA_1D_1$ следует, что NA_1DQ – прямоугольник), поэтому $d_1 = NQ = A_1D = a\sqrt{2}.$ Для нахождения d_2 определим положение вершин сечения на ребрах куба. Из подобия треугольников TPP_1 и TOO_1 с коэффициентом $k = PP_1 : OO_1 = \frac{1}{2}$ следует, что $TP_1 = \frac{1}{2}TO_1$, т.е. $TP_1 = P_1O_1 = \frac{a}{2}.$ Теперь из подобия треугольников

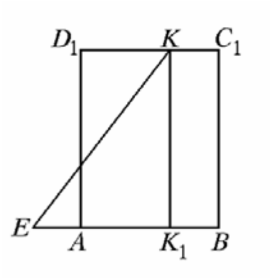


Рис. 14

TP_1Q и RDQ (рис. 13) получаем: $P_1Q : QD = TP_1 : RD = \frac{a}{2} : \frac{3a}{7} = 7 : 6,$ т.е. $QD = \frac{6}{13}P_1D = \frac{3a}{13}.$ Из подобия треугольников QDR и EAR получаем: $AE : DQ = AR : DR = 4 : 3,\quad AE = \frac{4a}{13}.$ Аналогично рассуждая, получаем, что $AM = \frac{4a}{7}$ (впрочем, можно было воспользоваться симметрией куба и рассматриваемого сечения относительно плоскости ABC_1). Из рис. 14, где $KC_1 = DQ = \dfrac{3a}{13}$, получаем

$$EK_1 = AE + AB - K_1B = \tfrac{4a}{13} + a - \tfrac{3a}{13} = \tfrac{14a}{13},$$

$KK_1 = AD_1 = a\sqrt{2},$ т.е. $KE = \sqrt{\frac{196a^2}{169} + 2a^2} = \frac{\sqrt{534}}{13}a.$ Значит, $S_1 = \frac{1}{2}d_1 d_2 = \frac{\sqrt{267}}{13}a^2$. Для нахождения $S_{REM} = S_2$ заметим, что треугольники REM и QEN подобны с коэффициентом $k_1 = RE : QE = RA : DA = 4 : 7$. Поэтому

$$S_2 = \left(\tfrac{4}{7}\right)^2 S_{QEN} = \left(\tfrac{4}{7}\right)^2 \tfrac{1}{2} S_1 = \tfrac{8}{49} S_1.$$

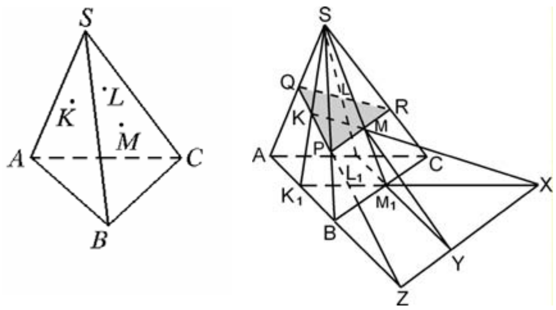
Итак, $S_\alpha = \frac{41}{49} S_1 = \frac{41\sqrt{267}}{637}a^2$.

Параллельное проектирование удобно использовать при построении сечений призм (в частности, параллелепипедов, кубов). При этом, как правило, в качестве плоскости проектирования выбирают плоскость основания призмы, а за направление проектирования – направление бокового ребра призмы.

При построении сечений пирамид удобно пользоваться *центральным проектированием.*

Определение. Пусть в пространстве заданы плоскость α (*плоскость проектирования*) и не принадлежащая ей точка S (*центр проектирования*). *Центральной проекцией* точки M называется точка M' пересечения прямой SM с плоскостью α , если она существует.

Замечание. Согласно данному определению точки, лежащие в плоскости, проходящей через центр проектирования параллельно плоскости проектирования, не имеют проекций.



а) б)

Рис. 15

Пример 12. *Построим сечение пирамиды* $SABC$ *плоскостью* KLM *(рис. 15а), где* $K \in (ASB)$, $L \in (ASC)$, $M \in (BSC)$.

Построим центральные проекции (центр проектирования – точка S) точек K, L, M на плоскости ABC. Пусть это будут точки K_1, L_1, M_1 (рис. 15б). Построим точки пересечения прямых KM и $K_1M_1 (X)$, LM и $L_1M_1 (Y)$. Тогда прямая XY – след α на плоскости ABC. Пусть прямые XY и AB пересекаются в точке Z (на рис. точка Z лежит на продолжении BA в точку B). Значит KZ – след α на плоскости

ASB и точки P и Q – точки пересечения ребер SA и SB с прямой KZ – вершины сечения. Наконец, QL – след α на плоскости ASC. Треугольник PQR – искомое сечение.