§5. Обратные тригонометрические функции

Рассмотрим не всю синусоиду, а только ее **часть**, определенную на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$: функцию $y=\sin x, D(y)=\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ (рис. 4г). Любая прямая $y=a, a\in[-1;1]$ пересекает график этой функции в **единственной** точке, абсцисса x которой **обозначается** $\arcsin a$. Именно обозначается, потому что конкретное значение для конкретного a вычисляется, за редким исключением, по формулам высшей математики. Эти вычисленные с определенной степенью точности значения заложены в калькуляторах. Из определения $\arcsin a$ немедленно следуют **тождества:** $\arcsin\sin x\equiv x$, если $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$,

$$\sin\arcsin a\equiv a,\ a\in[-1;1].$$

Эти тождества, как и основное логарифмическое, относительные, потому что они имеет место не для всех x, а лишь для $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, и не для всех a, а лишь для $a\in[-1;1]$.

Функция $y=\sin x, D(y)=\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ возрастает, т. е. строго монотонна на области определения, поэтому имеет обратную. Обратная функция тоже монотонно возрастает, ее графиком является кривая, симметричная $y=\sin x, D(y)=\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ относительно биссектрисы $y=x$ (рис. 9). Обычно независимую переменную обозначают x, а зависимую y. Поэтому более привычно записать $y=\arcsin x, D(y)=[-1;1]$, $E(y)=\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Аналогично определяются функции:

$y = \arccos x, D(\arccos x) = [-1;1], E(\arccos x) = [0;\pi]$ (рис. 10).

$y = arctgx, D(arctgx) = R, E(arctgx) = \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

$y = arcctgx, D(arcctgx) = R, E(arcctgx) = (0;\pi)$.

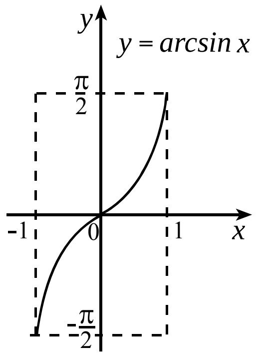


Рис. 9

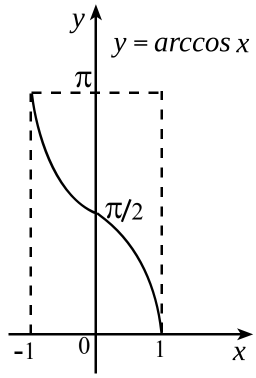
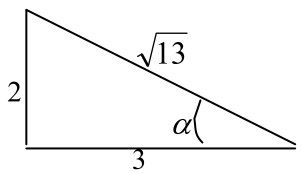


Рис. 10

Пример 16. Найдите значение выражения $2\sqrt{13}\cos\left(arctg\frac{2}{3}\right)$.

♦ Многих учащихся задача ставит в тупик.

Так как $\frac{2}{3} > 0$, то $\alpha = arctg\frac{2}{3}$ - это “угол” в треугольнике, тангенс которого равен $\frac{2}{3}$, т. е. противолежащий катет относится к прилежащему как 2:3. Построим треугольник с катетами 2 и 3.



По теореме Пифагора находим гипотенузу. Теперь находим

$\cos arctg\frac{2}{3} = \frac{3}{\sqrt{13}} \Rightarrow 2\sqrt{13}\cos arctg\frac{2}{3} = 6 \Rightarrow$ **Ответ:** 6.♦

Пример 17. (МИФИ). Найти наибольшее значение $f(x) = arctg(\sin 11x) + arcctg(\sqrt{3}\cos 2x)$ и x, при которых оно достигается.

♦ $-1 \le \sin 11x \le 1 \Rightarrow -\frac{\pi}{4} = arctg(-1) \le arctg(\sin 11x) \le arctg(1) = \frac{\pi}{4}$,

$-\sqrt{3} \le \sqrt{3}\cos 2x \le \sqrt{3} \Rightarrow \frac{\pi}{6} = arcctg\sqrt{3} \le arcctg(\sqrt{3}\cos 2x) \le$

$arcctg(-\sqrt{3}) = \frac{5\pi}{6}$.

Поэтому $-\frac{\pi}{12} \le arctg(\sin 11x) + arcctg(\sqrt{3}\cos 2x) \le \frac{13\pi}{12}$, при этом

$f_{\max}(x) = \frac{13\pi}{12}$, если $\begin{cases} \sin 11x = 1, \\ \cos 2x = -1. \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z, \\ \sin 11\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) \equiv (-1)^{11k}\sin\frac{3\pi}{2} \equiv -(-1)^{11k} = 1 \Leftrightarrow k = 2n-1, n \in Z \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x = 2\pi n - \frac{\pi}{2}, n \in Z \Rightarrow$ **Ответ:** $f_{\max}(x) = f\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = \frac{13\pi}{12}$. ♦

ТРИГОНОМЕТРИЯ

Элементарные тригонометрические уравнения

1. $$\sin x = a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} |a| > 1, \\ \varnothing; \end{cases} \\ \begin{cases} |a| \le 1, \\ x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in Z. \end{cases} \end{array} \right.$$

2. $\cos x = a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} |a| > 1, \\ \varnothing; \end{cases} \\ \begin{cases} |a| \le 1, \\ x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in Z. \end{cases} \end{array}\right.$
3. $tgx = a \Leftrightarrow x = arctga + \pi n, n \in Z.$
4. $ctgx = a \Leftrightarrow x = arcctga + \pi n, n \in Z.$

Пример 18. $\sin x = \dfrac{1-\sqrt{10}}{2} \Leftrightarrow \varnothing$, т.к.

$$\frac{1-\sqrt{10}}{2} = \frac{1-3,\dots}{2} = -1,\dots < -1.$$

Основные методы решения тригонометрических уравнений

1. Во многих случаях тригонометрическое уравнение удается преобразовать к виду $f(\sin mx) = 0$ (или $f(\cos mx) = 0$, или $f(tgx) = 0$). Затем надо решить уравнение $f(t) = 0,$ где $t = \sin mx,$ и для корней t_k, по модулю не больше 1, решить элементарные тригонометрические уравнения $\sin mx = t_k$.

Это заведомо можно сделать в следующих случаях.

$F\left(\sin^2 x, \cos^2 x, \cos x\right) = 0 \Leftrightarrow F\left(1-\cos^2 x, \cos^2 x, \cos x\right) = 0.$

Например,

$a\sin^2 x + b\cos^2 x + c\cos x = d \Leftrightarrow a\left(1-\cos^2 x\right) + b\cos^2 x + c\cos x = d$

$\Leftrightarrow (b-a)\cos^2 x + c\cos x = d - a$.

$a\sin^2 x + b\cos^2 x + c\sin x = d$ $a\sin^2 x + b\left(1-\sin^2 x\right) + c\sin x = d$

$(a-b)\sin^2 x + c\sin x = d - b$

2. Уравнение, однородное относительно $\cos kx, \sin mx$.

Уравнение $F(\sin mx, \cos kx) = 0$ называется однородным степени n относительно $\cos kx, \sin mx$, если

$$F(t\sin mx, t\cos kx) = t^n F(\sin mx, \cos kx).$$

Это уравнение приводится к уравнению с одним неизвестным заменой переменных $t=\dfrac{\cos kx}{\sin mx}$ (или $t=\dfrac{\sin mx}{\cos kx}$), где предварительно проверяется, не является ли решением $\sin mx=0$ (или $\cos kx=0$). Уравнение $a\cos^2 x+b\sin^2 x+c\sin 2x=0$ является однородным степени 2, т. к. $a(t\cos x)^2+b(t\sin x)^2+c2(t\sin x)(t\cos x)\equiv t^2\left(a\cos^2 x+b\sin^2 x+c\sin 2x\right)$.

Пример 19. $2\cos^2 x-3\cos x\cos 2x+\cos^2 2x=0$.

◆ $2\cos^2 x-3\cos x\cos 2x+\cos^2 2x=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}-1\right)\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}-\frac{1}{2}\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=\cos 2x,\\ 2\cos x=\cos 2x\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2\sin\dfrac{3x}{2}\sin\dfrac{x}{2}=0,\\ 2\cos^2 x-2\cos x-1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{3x}{2}=k\pi,\\ \dfrac{x}{2}=n\pi,\\ \cos x=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{2k\pi}{3},\\ x=2n\pi,\\ x=\pm\arccos\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}+2\pi n,\ n,k\in Z.\end{array}\right.$$

а) Однородное квадратное относительно $\cos x,\sin x$ уравнение

$$a\cos^2 x+b\sin^2 x+c\sin 2x=0.$$

Если коэффициент при $\cos^2 x$ отличен от 0, т. е. $a\neq 0$, то уравнение можно разделить на $\sin^2 x$: $a\cos^2 x+b\sin^2 x+c\sin 2x=0\Leftrightarrow$ $a\cos^2 x+b\sin^2 x+2c\sin x\cos x=0\Leftrightarrow b\cdot ctg^2 x+2c\cdot ctgx+b=0$.

Если коэффициент при $\sin^2 x$ отличен от 0, т. е. $b \neq 0$, то уравнение можно разделить на $\cos^2 x$: $a\cos^2 x + b\sin^2 x + c\sin 2x = 0 \Leftrightarrow$ $a\cos^2 x + b\sin^2 x + 2c\sin x\cos x = 0 \Leftrightarrow b \cdot tg^2 x + 2c \cdot tgx + a = 0$.

б) Неоднородное квадратное относительно $\cos x, \sin x$ уравнение $a\cos^2 x + b\sin^2 x + c\sin x\cos x = d$. Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством, заменим d выражением $d\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)$ и придем к уравнению предыдущего типа:

$$a\cos^2 x + b\sin^2 x + c\sin x\cos x = d \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a\cos^2 x + b\sin^2 x + c\sin x\cos x = d\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (a-d)\cos^2 x + (b-d)\sin^2 x + c\sin x\cos x = 0.$$

Например, если $b - d \neq 0$, то

$$a\cos^2 x + b\sin^2 x + c\sin x\cos x = d \equiv d\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (a-d)\cos^2 x + (b-d)\sin^2 x + c\sin x\cos x = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (b-d)tg^2 x + c \cdot tgx + (a-d) = 0.$$

Пример 20 (МГУ, 1995, ф-т почв.) Найти все значения параметра a, при которых уравнение $\cos 2y + 4a\cos y + 2a^2 + 1 = 0$ не имеет решений.

♦ $\cos 2y + 4a\cos y + 2a^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 y - 1 + 4a\cos y + 2a^2 + 1 \Leftrightarrow 2(\cos y + a)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos y = -a \Leftrightarrow \begin{cases} |a| > 1, \\ y \in \varnothing. \end{cases}$

Ответ: $(-\infty; -1) \cup (1; \infty)$. ♦

Пример 21. (МГУ, 1991, химфак).

$$16\cos^4 \frac{x}{4} + 6\sin^2 \frac{x}{4} = 3\cos\frac{x}{2} + 12\cos^2 \frac{x}{4}\cos 3x.$$

♦ $16\cos^4 \dfrac{x}{4} + 6\sin^2 \dfrac{x}{4} = 3\cos\dfrac{x}{2} + 12\cos^2 \dfrac{x}{4}\cos 3x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 4\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)^2+3\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)=3\cos\frac{x}{2}+6\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)\cos 3x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2\frac{x}{2}+2\cos\frac{x}{2}(1-3\cos 3x)+7-6\cos 3x=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{x}{2}=\frac{-1+3\cos 3x\pm 3\sqrt{(\cos 3x+3)(\cos 3x-1)}}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 3x-1\geq 0 \Leftrightarrow \cos 3x=1, \\ \cos\frac{x}{2}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\pm\frac{2\pi}{3}+4\pi n \Rightarrow \cos 3\left(\pm\frac{2}{3}+4n\right)\pi\equiv 1,\ n\in Z. \end{cases}$$

Ответ: $\pm\frac{2\pi}{3}+4\pi n,\ n\in Z.$ ♦

3. Уравнение вида $\sin ax+\cos bx=0$ (аналогично $tgax+ctgbx=0$)

$$\sin ax+\cos bx=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin ax+\sin\left(\frac{\pi}{2}-bx\right)=0 \Leftrightarrow 2\sin\left(\frac{(a-b)x+\frac{\pi}{2}}{2}\right)\cos\left(\frac{(a+b)x-\frac{\pi}{2}}{2}\right)=0.$$

Пример 22. ♦ $\sin 7x-\cos 19x=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sin 7x-\sin\left(\frac{\pi}{2}-19x\right)=0 \Leftrightarrow 2\sin\left(13x-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-6x\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\left(13x-\frac{\pi}{4}\right)=0 \Leftrightarrow x=\frac{\frac{\pi}{4}+k\pi}{13}, \\ \cos\left(6x-\frac{\pi}{4}\right)=0 \Leftrightarrow \frac{\frac{\pi}{2}+k\pi+\frac{\pi}{4}}{6}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{\pi}{52}+\frac{k\pi}{13},\quad \frac{\pi}{12}+\frac{\pi(4k+1)}{24},\ k\in Z.$ ♦

4. Уравнения вида $a\sin\alpha x + b\cos\alpha x = 0.$

Если $a \neq 0$, то $ab \neq 0.$

$a\sin\alpha x + b\cos\alpha x = 0 \Leftrightarrow tgax = -\dfrac{b}{a},$ т.к. уравнение при $\cos ax = 0$ не имеет решений.

Пример 23. $4\sin 3x - 7\cos 3x = 0.$

♦ $4\sin 3x - 7\cos 3x = 0 \Leftrightarrow tg3x = \dfrac{7}{4} \Leftrightarrow x = \dfrac{arctg\dfrac{7}{4} + k\pi}{3}.$

Ответ: $x = \dfrac{arctg\dfrac{7}{4} + k\pi}{3}.$ ♦

5. Уравнения вида $\sin x + \cos x = a$

Первый способ.

$$\sin x + \cos x = a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = a \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left|\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right| \leq 1, \\ x = \dfrac{\pi}{4} \pm \arccos\dfrac{a}{\sqrt{2}} + 2k\pi,\ k \in Z. \end{cases}$$

Второй способ.

$$\sin x + \cos x = a \Leftrightarrow$$

$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = a\left(\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (a-1)\cos^2\dfrac{x}{2} + (a+1)\sin^2\dfrac{x}{2} - 2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2} = 0$ - однородное квадратное относительно $\cos\dfrac{x}{2}, \sin\dfrac{x}{2}$ уравнение.

Третий способ.

$$\sin x+\cos x=a \Leftrightarrow \begin{cases}(\sin x+\cos x)\cdot a\geq 0,\\ (\sin x+\cos x)=a^2\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(\sin x+\cos x)a\geq 0,\\ 2\sin x\cos x=a^2-1\end{cases} \Leftrightarrow$$

6. Разложение на множители. Это самый распространенный метод решения тригонометрических уравнений.

а) Применение формул тригонометрии.

Пример 24 . (МГУ, 2001, биофак) $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-\sin x=\frac{1}{2}$

♦ $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-\sin x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2x\cdot\frac{1}{2}+\sin 2x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin x\cos x-\sin x=\sin^2 x \Leftrightarrow \sin x\left(\sqrt{3}\cos x-\sin x-1\right)=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0 \Leftrightarrow x=\pi n,\\ \cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}+2\pi k.\end{array}\right.$$

Ответ: $\pi n,\quad \pm\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ \ k,n\in R.$ ♦

Применяя формулы тригонометрии, всегда надо помнить, что **не все формулы** тригонометрии **являются тождествами.**
Чтобы не пользоваться неравносильными переходами для тангенсов, лучше перейти сразу к синусам и косинусам.

б) Группировка слагаемых, применение формул (особенно часто используются формулы $\cos 2x$ в той или иной форме):

Пример 25. (МФТИ, 2001) Решите уравнение

$$\frac{\cos^3 x\sin 3x}{\cos 2x}+\frac{\sin^3 x\cos 3x}{\cos 2x}=3\sin 2x\cos x.$$

♦ $\frac{\cos^3 x\sin 3x}{\cos 2x}+\frac{\sin^3 x\cos 3x}{\cos 2x}=3\sin 2x\cos x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos^2 x \cos x \sin 3x + \sin^2 x \sin x \cos 3x}{\cos 2x} = 3\sin 2x \cos x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1+\cos 2x)(\sin 4x + \sin 2x) + (1-\cos 2x)(\sin 4x - \sin 2x)}{4\cos 2x} =$$

$$= 3\sin 2x \cos x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{6\sin 2x \cos 2x}{4\cos 2x} \quad = 3\sin 2x \cos x \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x \neq 0, \\ \sin 2x\left(\dfrac{1}{2} - \cos x\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{k\pi}{2}, \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k. \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \left[\begin{array}{l} \dfrac{k\pi}{2}, \\ \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z. \end{array}\right.$$

Ответ: $x = \dfrac{k\pi}{2}, \ \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in Z.$ ♦

Пример 26. (МФТИ, 2002) Решите уравнение

$$\frac{3 + \cos 4x - 8\cos^4 x}{4(\cos x + \sin x)} = \frac{1}{\sin x} \Leftrightarrow \frac{3 + \cos 4x - 2(1 + \cos 2x)^2}{4(\cos x + \sin x)} \equiv$$

$$\equiv \frac{-4\cos 2x}{4(\cos x + \sin x)} \equiv \frac{(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)}{\cos x + \sin x} = \frac{1}{\sin x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x + \sin x \neq 0, \\ \sin x \neq 0, \\ \sin^2 x - \sin x \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x(\cos x + \sin x) = 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z.$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$ **.** ♦

в) Преобразование произведения в сумму, а затем в новое произведение.

Пример 27. Решите уравнение $\cos 14x \cos 15x = \cos 16x \cos 17x$.

◆ $\cos 14x \cos 15x = \cos 16 \cos 17 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\cos 29x + \cos x) =$

$$= \frac{1}{2}(\cos 33x + \cos x) \Leftrightarrow -2\sin 31x \sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = \left[\begin{array}{l} \frac{\pi n}{31}, \\ \frac{\pi n}{2}, n \in Z. \end{array}\right. \Rightarrow$$

Ответ: $\frac{\pi n}{31}, \frac{\pi n}{2}, n \in Z$. ◆

7. $F(\sin 2x, (\sin x \pm \cos x)) = 0$.

Так как $(\sin x - \cos x)^2 = 1 - \sin 2x \Leftrightarrow \sin 2x = 1 - (\sin x - \cos x)^2$, то удобнее сделать замену переменной $t = \sin x - \cos x$. Тогда $F(\sin 2x, \sin x - \cos x) \equiv F(1 - t^2, t) = 0$, т.е. получаем уравнение с одной переменной

$(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x \Leftrightarrow \sin 2x = (\sin x + \cos x)^2 - 1$

$t = \sin x + \cos x \Rightarrow F(\sin 2x, \sin x + \cos x) \equiv F(t^2 - 1, t) = 0$

8. Уравнение $F(\sin^{2n} x, \cos^{2m} x, \cos 2x) = 0$, всегда можно привести к виду $f(\cos 2x) = 0$

9. Универсальная подстановка $t = tg\frac{x}{2}$, которая приводит уравнение $F(\sin x, \cos x) = 0$ к уравнению с одним переменным.

$$F(\sin x, \cos x) = 0 \Leftrightarrow F\left(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}, \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\cos\dfrac{x}{2}=0,\\ F\left(0,-\sin^2\dfrac{x}{2}\right)=0;\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}\cos\dfrac{x}{2}\neq 0,\\ F\left(\cos^2\dfrac{x}{2}\cdot 2tg\dfrac{x}{2},\cos^2\dfrac{x}{2}\left(1-tg^2\dfrac{x}{2}\right)\right)=0\Leftrightarrow F\left(\dfrac{2tg\dfrac{x}{2}}{1+tg^2\dfrac{x}{2}},\dfrac{1-tg^2\dfrac{x}{2}}{1+tg^2\dfrac{x}{2}}\right)=0\Leftrightarrow f\left(tg\dfrac{x}{2}\right)=0.\end{array}\right.\end{array}\right.$$

10. Уравнение вида $a\sin x+b\cos x=c$, $ab\neq 0$.Введение вспомогательного угла

Уравнение $a\sin x+b\cos x=c$ можно решить с помощью универсальной тригонометрической подстановки: $a\sin x+b\cos x=c\Leftrightarrow$

$$2a\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+b\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)=c\left(\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}\right)\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 2a\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}+(b-c)\cos^2\dfrac{x}{2}-(b+c)\sin^2\dfrac{x}{2}=0$ - однородное уравнение степени 2.

Но в некоторых задачах такая замена не очень удачна.

Рассмотрим выражение $a\sin x+b\cos x$, умножим и разделим его на $\sqrt{a^2+b^2}$:

$$y(x)=a\sin x+b\cos x\equiv\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right).$$

Заметим, что

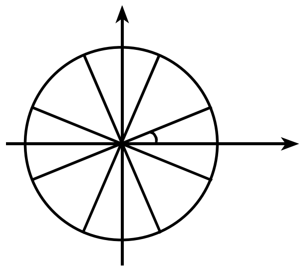
$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2\equiv 1.$$

Поэтому точки с координатами

$\left(\pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$,

$\left(\pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$,

$\left(\pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \mp\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$,



$\left(\pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \mp\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ принадлежат единичной окружности (всего восемь точек), и каждая пара координат может быть принята за косинус и синус соответствующего угла.

При этом всегда найдутся две пары положительных чисел, а, значит, угол в первой четверти, который может быть записан в виде любого “арка”.

При необходимости или желании можно выбрать любую пару, преобразовав соответственно заданное выражение.

Положим, например,

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\alpha, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\alpha.$$

Тогда заданное выражение $y(x) = a\sin x + b\cos x$ примет вид $y(x) = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha)$, т. к.

$$y(x) = \sqrt{a^2+b^2}(\cos\alpha\sin x + \sin\alpha\cos x) \equiv \sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+x).$$

Уравнение $a\sin x + b\cos x = c$ примет **простейший вид**

$$\sin(\alpha+x) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Пример 29. (МИФИ) Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $a\sin 3x + \sqrt{3(1-a)}\cos 3x = 2a-3$ имеет ровно три решения на отрезке $[-\pi;\pi]$.

♦ ОДЗ: $a \le 1$.

$a\sin 3x + \sqrt{3(1-a)}\cos 3x = 2a-3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2-3a+3}}\sin 3x+\frac{\sqrt{3(1-a)}}{\sqrt{a^2-3a+3}}\cos 3x=\frac{2a-3}{\sqrt{a^2-3a+3}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin(3x+\alpha)=\frac{2a-3}{\sqrt{a^2-3a+3}},$$

где $\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2-3a+3}}$, $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3(1-a)}}{\sqrt{a^2-3a+3}}$.

Функция $f(x)=\sin(3x+\alpha)$ имеет период $\frac{2\pi}{3}$, поэтому ровно три решения на отрезке $[-\pi;\pi]$ может быть только тогда, если

$$\frac{2a-3}{\sqrt{a^2-3a+3}}= \quad \pm 1\Leftrightarrow \pm\sqrt{a^2-3a+3}=2a-3\Leftrightarrow a^2-3a+2=0\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow a=\left[\begin{array}{l}1,\\2.\end{array}\right.\Rightarrow a=1$, и это значение не принимается ни на одном из концов отрезка $[-\pi;\pi]$. Проверим это.

$a=1:\ a\sin 3x+\sqrt{3(1-a)}\cos 3x=2a-3\Leftrightarrow$

$\sin 3x=-1\Rightarrow \sin(-3\pi)=\sin 3\pi=0\neq\pm 1.$

Ответ: 1.♦

11. Отбор корней в тригонометрических уравнениях

Пример 30. (МФТИ, 2001) $tgx+tg3x=4|\sin x|$.

♦ ОДЗ: $\cos x\cos 3x\neq 0.$

$$\frac{\sin 4x}{\cos x\cos 3x}=\frac{4\sin x\cos x\cos 2x}{\cos x\cos 3x}=4|\sin x|\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \sin x\cos 2x=|\sin x|\cos 3x\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin x \geq 0, \\ \sin x(\cos 2x - \cos 3x) = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi k, \\ \begin{cases} \sin x \geq 0, \\ \cos 2x - \cos 3x = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \end{array}\right. \\ \begin{cases} \sin x < 0, \\ \cos 2x + \cos 3x = 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \pi k, \\ \begin{cases} \sin x \geq 0, \\ \sin \dfrac{5x}{2} \sin \dfrac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{2\pi k}{5}, \\ 2\pi k; \end{array}\right. \Leftrightarrow \\ \sin x < 0, \\ \cos \dfrac{5x}{2} \cos \dfrac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \left[\begin{array}{l} \dfrac{\pi(2n+1)}{5}, \\ \pi(2k+1). \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2\pi k}{5} : \cos\frac{2\pi k}{5} \neq 0, \cos\frac{6\pi k}{5} \neq 0, \sin\frac{2\pi k}{5} \geq 0 \Rightarrow k = \left[\begin{array}{l} 5n, \\ 5n+1, \\ 5n+2. \end{array}\right.$$

$$x = \frac{\pi(2n+1)}{5} : \cos\frac{\pi(2n+1)}{5} \neq 0 \Rightarrow \cos\frac{6\pi(2n+1)}{5} \neq 0, \sin\frac{\pi(2n+1)}{5} =$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{5} + \frac{2\pi n}{5}\right) < 0 \Rightarrow n = \left[\begin{array}{l} 5k+3, \\ 5k+4. \end{array}\right.$$

$$x=\left[\begin{array}{l}\pi k,\\ \dfrac{2\pi}{5}+2\pi k,\\ \dfrac{4\pi}{5}+2\pi k,\\ \dfrac{7\pi}{5}+2\pi k,\\ \dfrac{9\pi}{5}+2\pi k.\end{array}\right. \Leftrightarrow x=\left[\begin{array}{l}\pi k,\\ \dfrac{2\pi}{5}+\pi k,\\ \dfrac{4\pi}{5}+\pi k.\end{array}\right.$$

Ответ: $\pi k, \dfrac{2\pi}{5}+\pi k, \dfrac{4\pi}{5}+\pi k, k\in Z$. ♦

12. Нестандартные уравнения

Пример 31. Решите уравнение $\sin^8 x-\cos^5 x=1$.

♦ $\sin^8 x-\cos^5 x=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin^8 x-\cos^5 x=\sin^2 x+\cos^2 x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin^2 x\left(1-\sin^6 x\right)+\cos^2 x\left(1+\cos^3 x\right)=0 \Leftrightarrow$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin^2 x=0,\\ \cos^2 x=0;\end{cases} \Leftrightarrow \varnothing;\\ \begin{cases}\sin^2 x=0,\\ 1+\cos^3 x=0;\end{cases} \Leftrightarrow x=\pi(2n+1), n\in Z;\\ \begin{cases}\sin^6 x=1,\\ \cos^2 x=0;\end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z;\\ \begin{cases}\sin^6 x=1,\\ \cos^3 x=-1;\end{cases} \Leftrightarrow \varnothing.\end{array}\right.$$

Ответ: $\pi(2n+1), \dfrac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$. ♦