§4. Периодические функции

Функция $f(x)$ называется периодической на X, если существует число $T \neq 0$, для которого выполнены два условия:

1. Если $x \in X$, то $x+T \in X, x-T \in X$.
2. Для любого $x \in X \Rightarrow f(x+T)=f(x)=f(x-T)$.

Если функция имеет период T, то любое число вида nT, $n \in Z$ – тоже период. Поэтому, говоря о периоде функции, часто имеют в виду наименьший положительный (НПП) период, если таковой существует. Из школы, например, известно, что $y=\sin x, y=\cos x$ имеют наименьший положительный период $T=2\pi$, а $y=tgx, y=ctgx$ имеют наименьший положительный период $T=\pi$. Область определения tgx и $ctgx$ не совпадает с R, но является периодичной с периодом π.

Не все периодические функции имеют наименьший положительный период: например, $y(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$ является суммой двух функций, каждая из которых имеет наименьший положительный период π. Но сумма $y(x)$ НПП не имеет, т. к. $y=\sin^2 x+\cos^2 x \equiv 1$, и её периодом является любое действительное число.

Пример 14. (МГУ, 1996, геогр. ф-т). Пусть $f(x)$ – периодическая функция с периодом $T=\sqrt{2}$. Найти значение $f(\sqrt{8})$, если известно, что $3f^2(0)+7f(\sqrt{72})+4=0$ и $f^2(-\sqrt{2})+3f(\sqrt{8})+\dfrac{20}{9}=0$.

♦ В силу периодичности,

$f(0)=f\left(k\sqrt{2}\right), k\in Z \Rightarrow$

$\Rightarrow f(0)=f\left(\sqrt{8}\right)=f\left(2\sqrt{2}\right)=f\left(-\sqrt{2}\right)=f\left(\sqrt{72}\right)=f\left(6\sqrt{2}\right)$.

Поэтому

$$\begin{cases} 3f^2(0)+7f\left(\sqrt{72}\right)+4=0, \\ f^2\left(-\sqrt{2}\right)+3f\left(\sqrt{8}\right)+\dfrac{20}{9}=0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3f^2(0)+7f(0)+4=0, \\ f^2(0)+3f(0)+\dfrac{20}{9}=0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2f(0)+4-\dfrac{20}{3}=0 \Leftrightarrow f(0)=-\dfrac{4}{3}, \\ \dfrac{16}{9}-4+\dfrac{20}{9}\equiv 0. \end{cases} \Rightarrow$$

Ответ: $-\dfrac{4}{3}$. ♦

Пример 15. (МГУ, 2000, ф-т почвоведения). Пусть $f(x)$ – периодическая функция с периодом 8, такая, что $f(x)=8x-x^2$ при $x\in[0;8]$. Решите уравнение $f(2x+16)+23=5f(x)$.

♦ В силу периодичности $f(x)$, во-первых, достаточно найти решения уравнения на любом отрезке длины 8, во-вторых, $f(2x+16)=f(2x)$, поэтому $f(2x+16)+23=5f(x) \Leftrightarrow f(2x)+23=5f(x)$.

Посмотрим, при каких n аргумент $f(2x+n\cdot 8)$ принадлежит промежутку, в котором определена $f(x)$, т. е.

$$0\le 2x+n\cdot 8\le 8 \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le 2x\le 8-8n \Rightarrow n\le 1, \\ 16\ge 2x\ge -8n \Rightarrow n\ge -2. \end{cases}$$

Рассмотрим каждый случай.

$n=1: 0\le x\le 0 \Leftrightarrow x=0$,

$n=0: 0\le 2x\le 8 \Leftrightarrow 0\le x\le 4 \Rightarrow f(2x)=8\cdot 2x-(2x)^2 \Rightarrow 16x-4x^2+23=40x-5x^2 \Rightarrow x=1$,

$n=-1: 0\le 2x-8\le 8 \Leftrightarrow 4\le x\le 8 \Leftrightarrow f(2x)=f(2x-8)=8(2x-8)-(2x-8)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 16x-64-4x^2+32x-64+23=40x-5x^2 \Leftrightarrow x^2+8x-105=0 \Rightarrow x=7$.

$n=-2; 0\le 2x-16\le 8 \Leftrightarrow 8\le x\le 12$.

Здесь уже нет необходимости рассматривать.

В силу периодичности, решениями будут числа
$1+8\cdot n,\ 7+8\cdot m,\ n,m\in Z.\Rightarrow$

Ответ: $1+8n,\ 7+8m;\ n,m\in Z.$ ♦