

### §3. Монотонные функции. Четные и нечетные функции

Числовая функция  $f(x)$ , определённая на множестве  $X$ , называется возрастающей (убывающей) на этом множестве, если для любых  $x_1, x_2 \in X$ , таких, что  $x_2 > x_1$  следует, что

$$f(x_2) > f(x_1) \quad (f(x_2) < f(x_1)).$$

Функция возрастающая или убывающая на множестве, называется монотонной функцией. Для нас важно, что отсюда следует, что из  $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ , а, следовательно, любая **монотонная функция имеет обратную**. Монотонность элементарных функций можно доказывать непосредственно или с помощью производных (это будет позже). Можно рассматривать ещё так называемые не строго монотонные функции – это функции, для которых для любых  $x_1, x_2 \in X, x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$  – это неубывающая функция, или для любых  $x_1, x_2 \in X, x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$  – невозрастающая фун-

кция. К ним относится функция  $y = const$ , которая является одновременно и неубывающей, и невозрастающей, и не имеет обратной.

**Пример 11.** Рассмотрим функцию  $y = \frac{1}{x}$ . Формула имеет смысл для  $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ , что и будет  $D(y)$ . Исследуем разность  $f(x_2) - f(x_1) = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{-(x_2 - x_1)}{x_1 x_2}$ . Отсюда следует, что, если  $x_2 > x_1$  и  $x_1 x_2 > 0$ , т. е. они одного знака, то разность отрицательна. Следовательно, функция убывает на  $(-\infty; 0)$  и убывает на  $(0; +\infty)$ , но не убывает на  $D(y)$  (а потому не является монотонной на области определения), т.к. если  $x_1 < 0, x_2 > 0 \Rightarrow x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0$  (что подтверждает правильность рис. 2б).

Функция  $f(x)$  называется четной (нечетной) на  $X$ , если выполнены два условия:

1. Если  $x \in X$ , то  $-x \in X$ , т. е. область определения симметрична относительно 0.
2. Для любого  $x \in X \Rightarrow f(x) = f(-x)$  ( $f(x) = -f(-x)$ ).

Если функция не является четной или нечетной, то говорят, что она является функцией общего вида.

**Пример 12.** Определить, являются ли четными, нечетными или функциями общего вида следующие функции:

$$\text{а) } y = \sqrt{x}, \quad \text{б) } y = \cos 4x, \quad \text{в) } y = \frac{x^3 - 4 \sin 2x}{\operatorname{ctgx}},$$

$$\text{г) } y = |x+1| - |x-1|, \quad \text{д) } y = \frac{x-1}{x^2+4}.$$

♦ а)  $y = \sqrt{x}$  является функцией общего вида, т. к. её область определения  $D(y) = [0; +\infty)$  не симметрична относительно 0.

б)  $y = \cos 4x$  – четная функция.

в)  $y = \frac{x^3 - 4 \sin 2x}{\operatorname{ctgx}}$  – четная функция, т. к.

1) область определения  $D(y)$  этой функции, состоящая из объединения счётного множества интервалов вида  $\left(\frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{2} + \frac{\pi n}{2}\right)$ ,  $n \in Z$ , симметрична относительно 0;

2) для любого  $x \in D(y) \Rightarrow y(x) = y(-x)$ .

г)  $y = |x+1| - |x-1|$  – нечётная, т. к.

$$y(-x) = |-x+1| - |-x-1| = -(|x+1| - |x-1|) = -y(x).$$

д)  $y = \frac{x-1}{x^2+4}$  – функция общего вида, т. к., например,

$$\begin{cases} 0 = y(1) \neq y(-1) = -\frac{2}{5}, \blacklozenge \\ y(1) \neq -y(-1). \end{cases}$$

График любой чётной функции симметричен относительно оси ординат, а график любой нечётной функции симметричен относительно начала координат. Поэтому для построения графиков таких функций достаточно построить их для положительных значений, а затем продолжить чётным или нечётным образом соответственно.

Посмотрим, как используется чётность функций при решении задач.

**Пример 13.** (МГУ, 1990, мехмат). Найти все значения параметра  $a$ , при которых уравнение  $x^2 - 2a \sin(\cos x) + a^2 = 0$  имеет единственное решение.

◆ Заметим, что левая часть уравнения является чётной функцией на  $R$ . Поэтому, если уравнение имеет решение  $x = x_0$ , то  $x = -x_0$  тоже является решением. Если  $x_0 \neq -x_0 \Leftrightarrow x_0 \neq 0$ , то уравнение имеет, по крайней мере, два корня. Поэтому, если корень один, то это  $x = 0$ . Посмотрим, при каких  $a$  уравнение имеет такой корень.

$$x = 0 : -2a \sin 1 + a^2 = 0 \Leftrightarrow a = \begin{cases} 0, \\ 2 \sin 1. \end{cases}$$

Но при таких  $a$  уравнение может иметь, вообще говоря, и другие корни – такие  $a$  нам не подходят. Найдём все решения при полученных  $a$ .

$$a = 0 : x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0;$$

$$a = 2 \sin 1 : x^2 - 4 \sin 1 \sin \cos x + 4 \sin^2 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 4 \sin 1 (\sin \cos x - \sin 1) \leq 0 \quad (\sin \cos x \leq \sin 1) \Leftrightarrow x = 0.$$

Итак, при этих  $a$  имеем единственное решение  $x = 0$ .

**Ответ:**  $0; 2 \sin 1$ . ♦