

§2. Обратная функция

Рассмотрим отображение $f : X \rightarrow f(X)$, или, что то же, $f : X \rightarrow E(f)$, (обратим внимание на то, что мы рассматриваем отображение не просто в Y , а в ту его часть, которая состоит из образов

всех $x \in X$) такое, что **различным** $x \in X$ соответствуют **различные** $y = f(x) \in Y$, т. е. если $x_1 \neq x_2$, то $f(x_1) \neq f(x_2)$ (рис. 5). Такое отображение $f : X \rightarrow f(X)$ называется взаимно однозначным.

В этом случае соответствие между $f(X)$ и X также является функцией с областью определения Y и областью значений X (рис.5), т. к. каждому $y \in f(X) \equiv E(f)$, соответствует, по крайней мере, один $x \in X$, а, в силу взаимной однозначности отображения, ровно один. Эта функция называется *обратной* к функции f и обозначается f^{-1} . Отметим, что

$$D(f) = E(f^{-1}) = X; E(f) = D(f^{-1}) = Y.$$

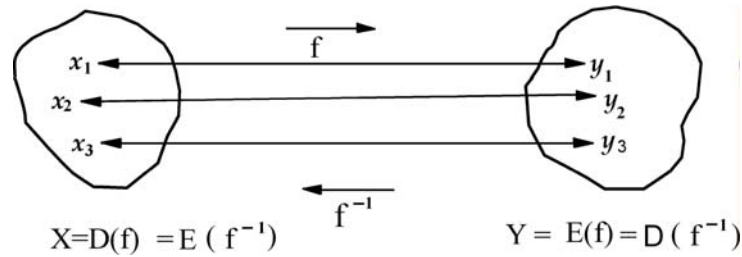


Рис. 5

Итак, **функция имеет обратную, если она осуществляет взаимно однозначное соответствие** между $D(f)$ и $E(f)$. (Поэтому, например, строго монотонная функция всегда имеет обратную.)

Пример 6. Отображение примера 1 не является взаимно однозначным. Отображение примера 2 является взаимно однозначным и даёт возможность идентифицировать человека по его отпечатку.

Пример 7. Рассмотрим функцию $y = x^3$.

Сравним значения функции в различных точках:

$$f(x_1) - f(x_2) = x_1^3 - x_2^3 \equiv (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2, \text{ т. е. рассматриваемое отображение взаимно однозначно.}$$

Любая горизонтальная прямая $y = a$ пересекает график функции в

единственной точке. Абсцисса этой точки **обозначается** $\sqrt[3]{a}$. Она является единственным решением уравнения $x^3 = a$.

Функция $y = x^3$ осуществляет взаимно однозначное соответствие между областью определения $D(f) = R$ и множеством значений $E(f) = R$. Поэтому существует обратная функция f^{-1} с областью определения $D(f^{-1}) = R$ и множеством значений $E(f^{-1}) = R$. Эта функция обозначается: $x = \sqrt[3]{y}$. Если переобозначить переменные более привычно, то формула примет вид: $y = \sqrt[3]{x}$ (график на рис. 6). Графики исходной функции $y = f(x)$ и обратной функции $y = f^{-1}(x)$ симметричны относительно прямой $y = x$ – биссектрисы первого и третьего координатных углов (x и y поменялись местами).

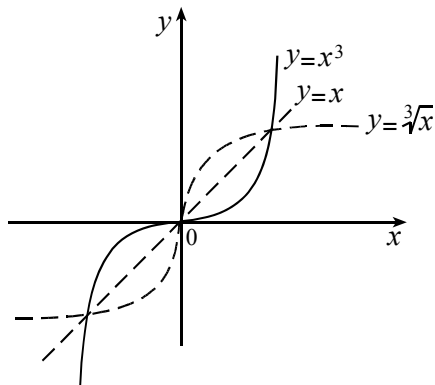


Рис. 6

Пример 8. Рассмотрим функцию $y = x^2$ (раз не указана область определения, то $D(f) = R$). Она не имеет обратной функции, так как различным $x_1 \neq 0$ и $x_2 = -x_1$ соответствует один $y = x_1^2 = x_2^2$, т. е. не существует взаимно однозначного соответствия между $D(f)$ и $E(f) = [0; +\infty)$.

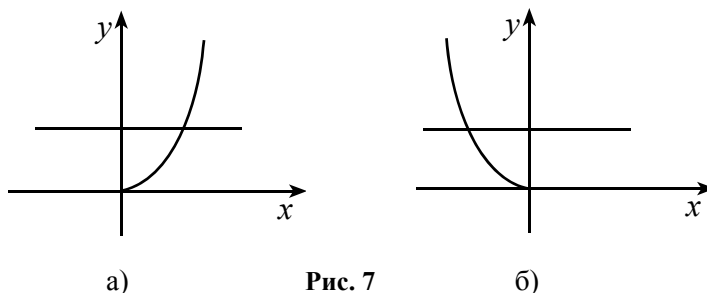


Рис. 7

Пример 9. Рассмотрим другую функцию: $y = x^2$, $D(f) = [0; +\infty)$

(рис. 7а). Любая прямая $y = a, a \geq 0$ пересекает кривую в единственной точке, абсцисса которой **обозначается** \sqrt{a} . В этом случае соответствие между $D(f) = [0; +\infty)$ и $E(f) = [0; +\infty)$

является взаимно однозначным, и существует обратная функция f^{-1} . Она обозначается:

$x = \sqrt{y}$ с областью определения

$D(f^{-1}) = [0; \infty)$ и множеством значений

$E(f^{-1}) = [0; \infty)$. В привычных переменных

это функция $y = \sqrt{x}$ (рис. 8).

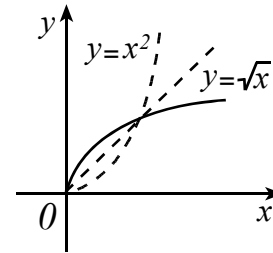


Рис. 8

Пример 10. Можно рассмотреть ещё одну

функцию: $y = x^2, D(f) = (-\infty; 0]$ (рис. 7б). Эта функция строго монотонна и тоже имеет обратную: $x = -\sqrt{y}$ с

$$D(f^{-1}) = [0; +\infty), E(f^{-1}) = (-\infty; 0].$$