Введение

Решение многих задач сводится к решению уравнений. Уже во втором тысячелетии до новой эры решали линейные и некоторые квадратные уравнения в Древнем Египте. Более сложные задачи решали в Древнем Вавилоне.

Один из первых дошедших до нас выводов формул для корней квадратного уравнения принадлежит индийскому математику Брахмагупте (около 598 г.). Среднеазиатский ученый аль-Хорезми (IX век) в трактате «Китаб аль-джеб валь-мукабала» получил формулу для корней методом выделения полного квадрата.

Затем в работах европейских математиков XIII-XVI в.в. даются отдельные методы решения различных квадратных уравнений. Слияние этих методов и общее правило произвел М. Штифель в 1544 году. Близкое к современному решение квадратного уравнения принято у Р. Бомбелли (1579 г.) и С. Стевина (1585 г.). Термин «квадратное уравнение» ввел Х. Вольф в 1710 году.

§1. Уравнения и правила их преобразований

Уравнением с переменной x называется равенство двух выражений

$$f(x)=g(x). \qquad (1)$$

Например, $x^2+1=x-3,\ x^2-1=0,\ |x|-3=0,\ \dfrac{2x-3}{x+3}=x+1.$

Число a называется *корнем* (или *решением*) данного уравнения с переменной x, если при подстановке числа a в обе части этого уравнения получается верное равенство, т. е. если при $x=a$ обе части уравнения определены и их значения совпадают.

Например, уравнение $2x^2=0$ имеет единственное решение $x=0$, а уравнение $x^2+3=0$ не имеет решений, т. к. $x^2+3>0$ при любом значении переменной x.

Уравнение $(x-1)(x+2)=0$ имеет только два решения $x=1$ и $x=-2$. При любом x, отличном от 1 и -2, левая часть отлична от нуля, следовательно, других решений, кроме 1 и -2, уравнение не имеет.

Решениями уравнения $\dfrac{x-1}{x-1}=1$ являются все числа, кроме $x=1$. Число 1 не является решением уравнения, т. к. при $x=1$ не определена левая часть уравнения. Это уравнение имеет бесконечно много решений.

Уравнению $2x=2x$ удовлетворяют все действительные числа, а уравнению $|x|=x$ удовлетворяют все неотрицательные числа.

Решить данное уравнение – значит найти **все** его корни (решения) или доказать, что их нет.

Два уравнения называются *равносильными,* если они имеют одно и то же множество решений, т. е. если каждое решение первого уравнения является решением второго и, наоборот, каждое решение второго уравнения является решением первого уравнения, или если оба уравнения не имеют решений.

Например, уравнения $3x-1=5$ или $(x-2)^2=0$ являются равносильными, т. к. каждое из них имеет единственное решение $x=2$. Уравнения $(x-1)(x-2)=0$ и $(x-1)^2=0$ не являются равносильными, т. к. число 2 является решением первого уравнения и не является решением второго.

Сформулируем несколько правил преобразования уравнений, широко используемых при решении уравнений.

Правило 1. Если выражение $y(x)$ определено при всех значениях x, при которых определены выражения $f(x)$ и $g(x)$, то уравнения $f(x)=g(x)$ и $f(x)+y(x)=g(x)+y(x)$ равносильны. В частности, равносильны уравнения $f(x)=g(x)$ и $f(x)-g(x)=0$.

На основании этого правила любое слагаемое можно переносить из одной части уравнения в другую с противоположным знаком, после этого получается уравнение, равносильное данному.

Правило 2. Если выражение $y(x)$ определено для всех x, для которых определены выражения $f(x)$ и $g(x)$, то любое решение уравнения $f(x)=g(x)$ является решением уравнения $f(x)\cdot y(x)=g(x)\cdot y(x)$.

Если, кроме того, $y(x)\neq 0$ для всех x, то уравнения $f(x)=g(x)$ и $f(x)\cdot y(x)=g(x)\cdot y(x)$ равносильны.

Правило 3. Каждое решение уравнения $f(x)=g(x)$ является решением уравнения $(f(x))^n=(g(x))^n$ при любом натуральном n.

Правило 4. Каждое решение уравнения $f(x)\cdot g(x)=0$ является решением, по крайней мере, одного из уравнений $f(x)=0$ или $g(x)=0$.

