Контрольные вопросы

1(2). Существуют ли такие действительные числа x, y, для которых числа z_1 и z_2 являются сопряжёнными, если $z_1 = 3x^2 - 10y \cdot i$, $z_2 = 3x^{10} + (5y+2)i$?

2(4). Являются ли тригонометрической формой числа $2i\sqrt{3} - 2$ следующие выражения (ответ объясните):

а) $4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{8\pi}{3}\right)$; б) $4\left(\cos\frac{8\pi}{3} + i\sin\frac{8\pi}{3}\right)$;

в) $-4\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$; г) $4\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$?

3(9). Где находится точка Z^2 комплексной плоскости, если точка Z удовлетворяет условию:

а) $|z|=4$; б) $\operatorname{Re} z=\operatorname{Im} z$; в*) $\operatorname{Im} z=1$?

4(4). Сколько решений имеет система уравнений:

а) $\begin{cases} |z|=2, \\ |z+3i|=5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} |z-2i|=|z-2|, \\ |z+i-5|=8? \end{cases}$

5(2). Делится ли многочлен $z^{2007}-5z^{1000}+z+3$ на многочлен z^2-1?

6(3). Докажите свойства $a, в, д$ на странице 8.

Задачи

1(4). Запишите z в алгебраической форме, если

а) $z=\frac{5-2i}{(2i+1)^2}+\frac{(3i-2)i}{3+i}$; б) $z=\frac{(2+3i)(3+i)(4i-1)}{(i+1)(i+2)(i+3)}$.

2(9). Решите уравнение:

а) $(3+2i)(2i-z)+(3zi-1)(2i+5)=6i-10$;

б) $z^2=(\overline{z})^3$; в) $z^2+z|z|+|z^2|=0$.

3(8). Запишите число z в тригонометрической форме:

а) $z=\sqrt{3}-i$; б) $z=\sin\frac{\pi}{7}+i\cos\frac{\pi}{7}$;

в) $z=\sin\frac{10\pi}{7}-i\cos\frac{10\pi}{7}$; г) $z=\sin 2\alpha+i(1-\cos 2\alpha)$,

где $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$.

4(11). Вычислите, используя тригонометрическую форму числа:

а) $\left(1-i\sqrt{3}\right)^{2007}-\left(1+i\sqrt{3}\right)^{2007}$; б) $\frac{(1+i)^{13}\left(\sqrt{3}+i\right)^4}{\left(\sqrt{3}-i\right)^6(1-i)^9}$;

в*) $z^n+\frac{1}{z^n}$, если $z+\frac{1}{z}=1$, $n\in N$.

5(12). Изобразите на комплексной плоскости множество точек, заданных условием:

а) $|z+i-2| \le |z-3i|$; б) $(2-3i)\overline{z} = (2+3i)z$;

в) $\left|\dfrac{z+i}{z-9i}\right| = \dfrac{1}{4}$; г) $\dfrac{\pi}{4} \le \arg(z-2i) \le \dfrac{\pi}{3}$.

6* (9). Вычислите сумму:

$$\cos\alpha + a\cos 2\alpha + a^2\cos 3\alpha + \ldots + a^{n-1}\cos n\alpha.$$

7(15). Решите алгебраическое уравнение:

а) $z^2 + (4i+15)z + 35 + 95i = 0$; б) $z^6 = -1$;

в) $z^4 = i + \sqrt{3}$; г*) $1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^{11} = 0$.

8(11). а) Остаток от деления многочлена $F(z)$ на многочлен $z+3$ равен 5, а остаток от деления многочлена $F(z)$ на многочлен $z-4$ равен -2. Найдите остаток от деления многочлена $F(z)$ на многочлен $z^2 - z - 12$.

б*) Найдите остаток от деления многочлена $z^{2007} - 13z^{500} + 2z^5 + 3$ на многочлен $z^2 - z + 1$.

9(12). Представьте $P(z)$ в виде произведения многочленов первой и второй степени с действительными коэффициентами:

а) $P(z) = z^4 + 2z^2 + 5$;

б) $P(z) = z^6 - 3z^5 - 4z^4 + 10z^3 + 9z^2 - 7z - 6$; в) $P(z) = z^4 + 4$.

10(5). Докажите, что число $3i - 2$ является корнем уравнения $z^4 - 9z^3 - 38z^2 - 165z + 13 = 0$ и найдите остальные корни этого уравнения.

11* (12). Сумма кубов корней уравнения $z^3 + z^2 - z + \alpha = 0$ равна (-49). Найдите α и решите это уравнение.

