

### § 3. Различные формы записи комплексных чисел. Операции над комплексными числами

**1. Алгебраическая и тригонометрическая формы комплексного числа.** Запись комплексного числа  $z$  в виде  $a + bi$  называется *алгебраической формой* комплексного числа.

Рассмотрим другие формы записи комплексных чисел. Пусть  $r$  – модуль, а  $\varphi$  – какой-либо из аргументов комплексного числа  $z = a + ib$ , то есть  $r = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ,  $\varphi = \arg(a + ib)$ . Тогда из формулы (5) следует, что  $a = r \cos \varphi$ ,  $b = r \sin \varphi$ , и, значит,

$$a + bi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Запись комплексного числа в виде  $r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  называется *тригонометрической формой*.

Тригонометрическая форма записи комплексных чисел во многих случаях оказывается более удобной, чем алгебраическая.

Для того, чтобы перейти от алгебраической формы комплексного числа  $a + bi$  к тригонометрической, достаточно найти его модуль и *один* из аргументов.

**Пример 7.** Записать число  $z = \sqrt{3} - i$  в тригонометрической форме.

$$\text{Находим модуль } r = |z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2.$$

Находим один из аргументов; так как  $\operatorname{Re} z = \sqrt{3} > 0$ ,  $\operatorname{Im} z = -1 < 0$ , то число  $\sqrt{3} - i$  лежит в IV четверти. Поэтому надо найти такое решение уравнения  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{-1}{\sqrt{3}}$ , которое является углом в IV четверти, т.е.

$$\varphi = \frac{11\pi}{6}. \text{ Таким образом, } \sqrt{3} - i = 2 \left( \cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right).$$

**Пример 8.** Записать число в тригонометрической форме:

$$z = 1 + \cos 2\alpha - i \sin 2\alpha, \left( \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \right).$$

**Решение.**

$$\begin{aligned} r^2 = |z|^2 &= (1 + \cos 2\alpha)^2 + \sin^2 2\alpha = 1 + 2 \cos 2\alpha + \cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha = \\ &= 2 + 2 \cos 2\alpha = 4 \cos^2 \alpha; \text{ отсюда } |z| = -2 \cos \alpha \text{ (т. к. } \alpha \text{ — угол третьей} \\ &\text{ четверти)}. \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg}(\arg z) = -\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = -\frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{2 \cos^2 \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(-\alpha), \text{ откуда}$$

$$\arg z = -\alpha + \pi k.$$

Так как  $1 + \cos 2\alpha > 0$ , а  $-\sin 2\alpha < 0$ , то число  $z$  лежит в четвертой четверти, и в качестве аргумента можно выбрать  $\arg z = \pi - \alpha$ .

$$\text{Итак, } z = -2 \cos \alpha \cdot (\cos(\pi - \alpha) + i \sin(\pi - \alpha)).$$

**2. Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме.**

$$\text{Пусть } z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2).$$

$$\text{Тогда } z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i \cdot (\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 +$$

$$+ \cos \varphi_2 \sin \varphi_1) = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \quad (6)$$

Таким образом, модуль произведения двух комплексных чисел равен произведению модулей сомножителей, а сумма аргументов сомножителей является аргументом произведения.

Пусть  $z_2 \neq 0$ , тогда

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) r_2(\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)}{r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) r_2(\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)} = \\ &= \frac{r_1}{r_2} (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2) = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)). \quad (7) \end{aligned}$$

Таким образом, модуль частного двух комплексных чисел равен частному модулей делимого и делителя, а разность аргументов делимого и делителя является аргументом частного.

**3. Возведение в степень и извлечение корня.** Формула (6) для произведения двух комплексных чисел может быть обобщена на случай  $n$  сомножителей. Используя метод математической индукции, нетрудно показать, что если  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  – аргументы чисел  $z_1, z_2, \dots, z_n$  соответственно, то  $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \dots + \varphi_n = \arg(z_1 z_2 \dots z_n)$ ,

$$|z_1| |z_2| \dots |z_n| = |z_1 z_2 \dots z_n|.$$

Отсюда, как частный случай, получается формула, дающая правило возведения комплексного числа  $r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  в целую положительную степень:

$$z^n = (r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \quad (8)$$

Таким образом, при возведении комплексного числа в степень с натуральным показателем его модуль возводится в степень с тем же показателем, а аргумент умножается на показатель степени.

Формула (8) называют *первой формулой Муавра*.

**Пример 9.** Найти  $z^{11}$ , если  $z = 1 - i$ .

Так как  $|1 - i| = \sqrt{2}$ , а одним из аргументов является  $\varphi = -\frac{\pi}{4}$  (см. пример 5), то

$$z = \sqrt{2} \left( \cos \left( -\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{4} \right) \right).$$

Следовательно, применяя формулу (8), получим

$$z^{11} = (\sqrt{2})^{11} \left[ \cos\left(-\frac{11\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{11\pi}{4}\right) \right] = 2^{11/2} \left[ \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) - i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right] =$$

$$= 2^{11/2} \left[ -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right] = -\sqrt{2}^{10} (1+i) = -2^5 (1+i).$$

**Пример 10.** Вычислите сумму

$$B = \sin \varphi + \sin(\varphi + \alpha) + \sin(\varphi + 2\alpha) + \dots + \sin(\varphi + n\alpha).$$

**Решение.** Рассмотрим также сумму

$$A = \cos \varphi + \cos(\varphi + \alpha) + \cos(\varphi + 2\alpha) + \dots + \cos(\varphi + n\alpha) \text{ и обозначим } S = A + Bi.$$

Тогда интересующая нас сумма  $B$  есть мнимая часть числа  $S$ :  
 $B = \text{Im } S$ . Преобразуем  $S$ :

$$S = (\cos \varphi + \cos(\varphi + \alpha) + \cos(\varphi + 2\alpha) + \dots + \cos(\varphi + n\alpha)) +$$

$$+ i(\sin \varphi + \sin(\varphi + \alpha) + \sin(\varphi + 2\alpha) + \sin(\varphi + n\alpha)) =$$

$$= (\cos \varphi + i \sin \alpha) + (\cos(\varphi + \alpha) + i \sin(\varphi + \alpha)) +$$

$$+ (\cos(\varphi + 2\alpha) + i \sin(\varphi + 2\alpha)) + \dots + (\cos(\varphi + n\alpha) + i \sin(\varphi + n\alpha)).$$

Воспользовавшись первой формулой Муавра, получаем:

$$S = (\cos \varphi + i \sin \varphi) + (\cos \varphi + i \sin \varphi)(\cos \alpha + i \sin \alpha) + (\cos \varphi + i \sin \varphi) \cdot$$

$$\cdot (\cos \alpha + i \sin \alpha)^2 + \dots + (\cos \varphi + i \sin \varphi)(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n.$$

Обозначим  $z_0 = \cos \varphi + i \sin \varphi$ ,  $\omega_0 = \cos \alpha + i \sin \alpha$ .

$$\text{Тогда } S = z_0 + z_0 \omega_0 + z_0 \omega_0^2 + \dots + z_0 \omega_0^n = z_0 (1 + \omega_0 + \omega_0^2 + \dots + \omega_0^n).$$

Используя формулу для суммы геометрической прогрессии, получаем:

$$S = z_0 \cdot \frac{\omega_0^{n+1} - 1}{\omega_0 - 1}.$$

Чтобы выделить мнимую часть числа, домножим дробь на сопряженное.

$$S = z_0 \cdot \frac{(\omega_0^{n+1} - 1)(\overline{\omega_0} - 1)}{(\omega_0 - 1)(\overline{\omega_0} - 1)} = z_0 \cdot \frac{\omega_0^{n+1} \cdot \overline{\omega_0} - \omega_0^{n+1} - \overline{\omega_0} + 1}{\omega_0 \overline{\omega_0} - \omega_0 - \overline{\omega_0} + 1}.$$

Заметим, что  $\omega_0 \cdot \overline{\omega_0} = |\omega_0|^2 = 1$ ;  $\omega_0 + \overline{\omega_0} = 2 \cos \alpha$ . Тогда

$$\begin{aligned}
 S &= z_0 \cdot \frac{\omega_0^n - \overline{\omega_0^{n+1}} - \overline{\omega_0} + 1}{2 - 2 \cos \alpha} = \frac{z_0 \omega_0^n - z_0 \overline{\omega_0^{n+1}} - z_0 \overline{\omega_0} + z_0}{4 \sin^2(\alpha/2)} = \\
 &= [\cos(\varphi + n\alpha) + i \sin(\varphi + n\alpha) - \cos(\varphi + (n+1)\alpha) - i \sin(\varphi + (n+1)\alpha) - \\
 &\quad - \cos(\varphi - \alpha) - i \sin(\varphi - \alpha) + \cos \varphi + i \sin \varphi] / 4 \sin^2(\alpha/2).
 \end{aligned}$$

Выделяем мнимую часть  $S$ :

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Im} S &= \frac{\sin(\varphi + n\alpha) - \sin(\varphi + (n+1)\alpha) - \sin(\varphi - \alpha) + \sin \varphi}{4 \sin^2(\alpha/2)} = \\
 &= \frac{2 \sin \frac{\varphi + n\alpha - (\varphi + (n+1)\alpha)}{2} \cos \frac{\varphi + n\alpha + \varphi + (n+1)\alpha}{2} + 2 \sin \frac{\varphi - (\varphi - \alpha)}{2} \cos \frac{\varphi + (\varphi - \alpha)}{2}}{4 \sin^2(\alpha/2)} = \\
 &= \frac{-2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos\left(\varphi + \frac{2n+1}{2}\alpha\right) + 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos\left(\varphi - \frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\varphi - \frac{\alpha}{2}\right) - \cos\left(\varphi + \frac{2n+1}{2}\alpha\right)}{4 \sin^2(\alpha/2)} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos\left(\varphi - \frac{\alpha}{2}\right) - \cos\left(\varphi + \frac{2n+1}{2}\alpha\right)}{2 \sin \alpha/2} = \\
 &= \frac{-2 \sin \left( \frac{\varphi - \frac{\alpha}{2} - \left(\varphi + \frac{2n+1}{2}\alpha\right)}{2} \right) \sin \left( \frac{\varphi - \frac{\alpha}{2} + \left(\varphi + \frac{2n+1}{2}\alpha\right)}{2} \right)}{2 \sin \alpha/2} = \\
 &= \frac{\sin \frac{(n+1)\alpha}{2} \sin \left( \varphi + \frac{n\alpha}{2} \right)}{\sin \alpha/2}.
 \end{aligned}$$

Перейдем к операции извлечения корня данной степени из комплексного числа.

Число  $z$  называется *корнем степени  $n$* ,  $n \in \mathbb{N}$  из числа  $\omega$  (обозначается  $\sqrt[n]{\omega}$ ), если  $z^n = \omega$ .

Таким образом, для того, чтобы извлечь корень степени  $n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  из числа  $\omega$ , достаточно решить уравнение  $z^n = \omega$ .

Если  $\omega = 0$ , то при любом  $n$  уравнение  $z^n = 0$  имеет одно и только одно решение  $z = 0$ .

Пусть теперь  $\omega \neq 0$ . Представим  $z$  и  $\omega$  в тригонометрической форме:

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad \omega = r_0(\cos \varphi_0 + i \sin \varphi_0).$$

Тогда уравнение  $z^n = \omega$  примет вид

$$(r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = r_0(\cos \varphi_0 + i \sin \varphi_0).$$

Два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны их модули, а аргументы отличаются на число, кратное  $2\pi$ . Следовательно,

$$r^n = r_0, \quad n\varphi = \varphi_0 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

или

$$r = \sqrt[n]{r_0}, \quad \varphi = \frac{\varphi_0}{n} + \frac{2\pi}{n}k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, все решения уравнения  $z^n = \omega$  даются формулой

$$z_k = \sqrt[n]{r_0} \left( \cos \left( \frac{\varphi_0}{n} + \frac{2\pi}{n}k \right) + i \sin \left( \frac{\varphi_0}{n} + \frac{2\pi}{n}k \right) \right),$$

$$k = 0, 1, \dots, (n-1). \quad (9)$$

В самом деле, придавая числу  $k$  в формуле (9) целые значения, отличные от  $0, 1, \dots, (n-1)$ , мы не получим других комплексных чисел. Например, при  $k = n$  получаем

$$z_n = \sqrt[n]{r_0} \left( \cos \left( \frac{\varphi_0}{n} + 2\pi k \right) + i \sin \left( \frac{\varphi_0}{n} + 2\pi k \right) \right) =$$

$$= \sqrt[n]{r_0} \left( \cos \frac{\varphi_0}{n} + i \sin \frac{\varphi_0}{n} \right) = \omega.$$

Формула (9) называется *второй формулой Муавра*.

Таким образом, если  $\omega \neq 0$ , то существует ровно  $n$  корней степени  $n$  из числа  $\omega$ : все они содержатся в формуле (9).

В частности, если  $n = 2$ , то уравнение  $z^2 = \omega$  имеет два корня:

$$z_1 = \sqrt{r_0} \left( \cos \frac{\varphi_0}{2} + i \sin \frac{\varphi_0}{2} \right),$$

$$z_2 = \sqrt{r_0} \left( \cos \left( \frac{\varphi_0}{2} + \pi \right) + i \sin \left( \frac{\varphi_0}{2} + \pi \right) \right) = -z_1,$$

то есть эти корни симметричны относительно начала координат.

Также из формулы (9) нетрудно получить, что если  $n \geq 3, n \in \mathbb{N}$ , то точки, изображающие все корни уравнения  $z^n = \omega$ , являются вершинами правильного  $n$ -угольника, вписанного в окружность с центром в точке  $z = 0$  и радиусом  $\sqrt[n]{|\omega|}$ .

**Пример 11.** Найти все значения  $\sqrt[3]{-8}$ .

Запишем число  $\omega = -8$  в тригонометрической форме:

$$\omega = -8 = 8(\cos \pi + i \sin \pi).$$

Применяя формулу (9), получаем

$$z_k = 2 \left( \cos \left( \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} k \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} k \right) \right), \quad k = 0, 1, 2.$$

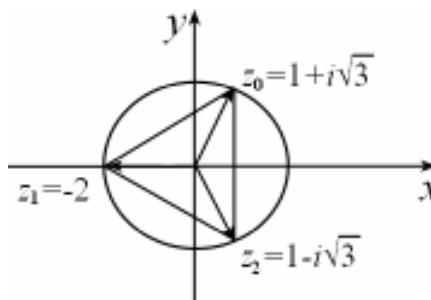
$$\text{Следовательно, } z_0 = 2 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 1 + \sqrt{3}i,$$

$$z_1 = 2(\cos \pi + i \sin \pi) = -2,$$

$$z_2 = 2 \left( \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = 1 - \sqrt{3}i.$$

Точки, соответствующие числам  $z_0, z_1, z_2$ , находятся в вершинах правильного треугольника, вписанного в окружность радиуса 2 с центром в точке  $z = 0$  (см. рис. 10).

Из сказанного выше видно, что символ  $\sqrt[n]{\omega}$  не имеет однозначного смысла. Поэтому, употребляя его, следует четко представлять себе, что под этим символом подразумевается. Например, используя запись  $\sqrt{-1}$ , следует позаботиться о том, чтобы было ясно, понимается ли под этим символом пара комплексных чисел  $i$  и  $-i$ , или одно, и, если одно, то какое именно.



**Рис. 10**