§ 2. Геометрическое изображение комплексных чисел. Модуль и аргументы комплексного числа

1. ***Комплексная плоскость.*** Рассмотрим прямоугольную систему координат на плоскости. Каждому комплексному числу $z = a + ib$ поставим в соответствие точку $M(a,b)$ координатной плоскости, т.е. точку, абсцисса которой равна $\operatorname{Re} z = a,$ а ордината равна $\operatorname{Im} z = b.$ Обратно, каждой точке плоскости с координатами (a,b) поставим в соответствие комплексное число $z = a + ib$.

Таким образом, построено взаимно однозначное соответствие между множеством комплексных чисел и точками плоскости, на которой выбрана система координат. Сама координатная плоскость называется при этом *комплексной плоскостью*. Ось абсцисс называется *действительной осью*, т.к. на ней расположены точки, соответствующие комплексным числам $a + i0$, т.е. соответствующие действительным числам. Ось ординат называется *мнимой осью* – на ней лежат точки, соответствующие мнимым комплексным числам $0 + bi.$

Не менее важной и удобной является интерпретация комплексного числа $a + bi$ как вектор $\overrightarrow{OM}$ (см. рис. 1). Очевидно, что каждому вектору плоскости с началом в точке $O(0,0)$ и концом в точке $M(a,b)$ соответствует комплексное число $a + bi$ и наоборот. Нулевому вектору соответствует комплексное число $0 + 0i.$

Взаимно однозначные соответствия, установленные между множеством комплексных чисел и множеством точек плоскости, между множеством комплексных чисел и множеством векторов плоскости, позволяют называть комплексное число $z = a + bi$ точкой $a + bi$ или вектором $z = a + ib$.

2. ***Модуль комплексного числа.*** Перейдем к понятию модуля комплексного числа.

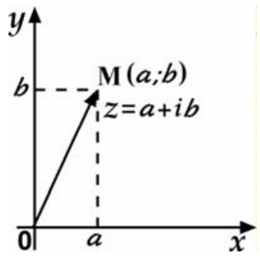


Рис. 1

Определение. *Модулем* комплексного числа $z = a + ib$ называется длина вектора, соответствующего этому числу. Модуль обозначается $|z|$ или буквой *r*. Применяя теорему Пифагора, получим, что $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (см. рис. 1).

Если $z = a + 0i$, то $|z| = |a + 0i| = \sqrt{a^2} = |a|$, то есть для действительного числа модуль совпадает с абсолютной величиной этого числа.

Очевидно, что $|z| > 0$ для всех $z \neq 0$; $|z| = 0$ в том и только том случае, когда $z = 0 + i0 = 0$.

Пусть $z = a + ib$. Число $a - bi$ называется *комплексно сопряженным* с числом $z = a + ib$ и обозначается $\bar{z}$; $\bar{z} = a - bi$ (см. рис.2).

Заметим, что $|z| = |\bar{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$,

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2 = |\bar{z}|^2,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2}, \ z_2 \neq 0.$$

Полученное соотношение сводит деление комплексных чисел z_1 и z_2 к умножению чисел z_1 и $\bar{z}_2$ к делению их произведения на действительное положительное число $|z_2|^2$, что позволяет не запоминать довольно громоздкую формулу (4). Заметим также, что *сумма и произведение комплексных чисел* z *и* $\bar{z}$ *всегда является действительным числом.*

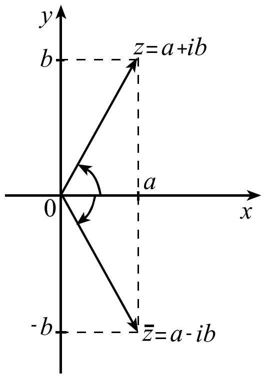


Рис. 2

Пример 3. Найти частное $\dfrac{3 - 5i}{-1 + 10i}$.

Умножая числитель и знаменатель дроби на число, сопряженное знаменателю, имеем

$$\frac{3-5i}{-1+10i}=\frac{(3-5i)(-1-10i)}{(-1+10i)(-1-10i)}=\frac{-3+5i-30i+50i^2}{1+100}=-\frac{53}{101}-\frac{25}{101}i.$$

Заметим также, что выполняются соотношения:

$$|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2| \qquad \text{(а)}$$

$$|z_1/z_2|=|z_1|/|z_2| \qquad \text{(б)}$$

$$\overline{z}_1+\overline{z}_2=\overline{z_1+z_2} \qquad \text{(в)}$$

$$\overline{z}_1\cdot\overline{z}_2=\overline{z_1\cdot z_2} \qquad \text{(г)}$$

$$\overline{(z_1/z_2)}=\overline{z_1}/\overline{z_2}. \qquad \text{(д)}$$

Докажем, например, (б) и (г). Пусть $z_1=a+bi, z_2=c+di.$ Тогда

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+i\frac{bc-ad}{c^2+d^2};$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\sqrt{\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right)^2+\left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{a^2c^2+b^2d^2+2abcd+b^2c^2-2abcd+a^2d^2}{\left(c^2+d^2\right)^2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{\left(a^2+b^2\right)c^2+\left(a^2+b^2\right)d^2}{\left(c^2+d^2\right)^2}}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}}=\frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

Перейдем к равенству (г).

$\overline{z}_1\cdot\overline{z}_2=\left(a-bi\right)\left(c-di\right)=ac-bd-\left(bc+ad\right)i;$

$\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{\left(a+bi\right)\left(c+di\right)}=\overline{ac-bd+\left(bc+ad\right)i}=ac-bd-\left(bc+ad\right)i.$

Остальные соотношения докажите самостоятельно (контрольный вопрос [1] 6).

3. ***Геометрический смысл сложения, вычитания и модуля разности двух комплексных чисел.*** Пусть $z_1=a_1+ib_1$ и $z_2=a_2+ib_2$. Им соответствуют векторы с координатами (a_1,b_1) и (a_2,b_2). Тогда числу

$$z_1+z_2=a_1+a_2+i(b_1+b_2)$$

будет соответствовать вектор с координатами (a_1+a_2, b_1+b_2). Таким образом, чтобы найти вектор, соответствующий сумме комплексных чисел z_1 и z_2, надо сложить векторы, отвечающие комплексным числам z_1 и z_2.

Аналогично, разности $z_1 - z_2$ комплексных чисел z_1 и z_2 соответствует разность векторов, соответствующих числам z_1 и z_2.

Модуль $|z_2 - z_1|$ разности двух комплексных чисел z_2 и z_1 по определению модуля есть длина вектора $z_1 - z_2$. Построим этот вектор, как сумму двух векторов z_2 и $(-z_1)$ (см. рис. 3). Получим вектор $\overrightarrow{OM}$, равный вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$.

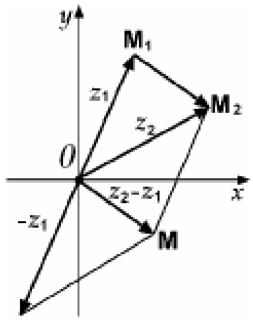


Рис. 3

Следовательно, $|z_2 - z_1|$ есть длина вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$, то есть **модуль разности двух комплексных чисел есть расстояние между точками комплексной плоскости, которые соответствуют этим числам.**

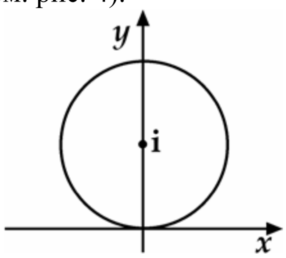
С помощью полученного соотношения решим следующие задачи.

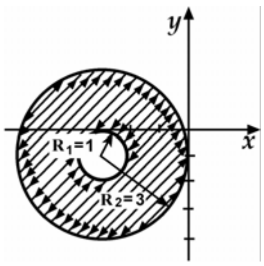
Пример 4. Найти множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию:

а) $|z - i| = 1$, б) $1 < |z + 3 + i| < 3$,

в) $|z - 1| < |z + 1|$; г) $|z - 1| = 2|z + 2|$?

а) Условию $|z - i| = 1$ удовлетворяют те и только те точки комплексной плоскости, которые удалены от точки i на расстояние, равное 1. Такие точки лежат на окружности радиуса 1 с центром в точке i (см. рис. 4).





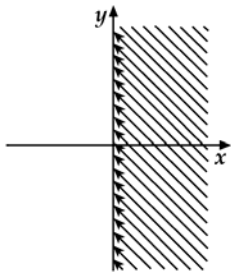


Рис. 4 **Рис. 5** **Рис. 6**

б) Условию $1 < |z + 3 + i| < 3$ удовлетворяют те и только те точки комплексной плоскости, которые удалены от точки $(-3 - i)$ на расстояние, большее 1, но меньше 3. Такие точки расположены внутри кольца, образованного двумя концентрическими окружностями с центром в точке ($-3-i$) и радиусами $R_1=1, R_2=3$ (см. рис. 5: искомое множество заштриховано).

в) Используя геометрическую интерпретацию модуля разности двух комплексных чисел, задачу переформулируем так: найти множество точек комплексной плоскости, которые расположены ближе к точке $z=1$, чем к точке $z=-1$. Ясно, что это все точки плоскости, лежащие правее мнимой оси, и только они (см. рис. 6: искомое множество заштриховано).

г) Пусть $z=x+iy$. Тогда

$$|x-1+iy|=2|x+2+iy|,$$

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2}=2\sqrt{(x+2)^2+y^2},$$

$$x^2-2x+1+y^2=4\left(x^2+4x+4+y^2\right),$$

$$3x^2+18x+3y^2+15=0,$$

$$x^2+6x+y^2+5=0,$$

$$(x+3)^2+y^2=4.$$

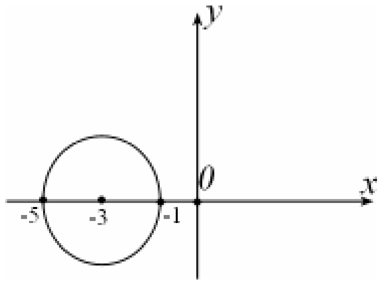


Рис. 7

Это окружность с центром в точке $z=-3$ и радиусом 2.

4. ***Аргументы комплексного числа.*** Аргументом комплексного числа $z=a+ib\,(z\neq 0)$ называется величина угла между положительным направлением действительной оси и вектором z; величина угла считается положительной, если отсчет угла производится против часовой стрелки, и отрицательной, если отсчет производится по часовой стрелке.

Для обозначения того факта, что число φ является аргументом числа $z=a+ib$, пишут $\varphi=\arg z$ или $\varphi=\arg(a+ib)$.

Для числа $z=0$ аргумент не определяется. Поэтому во всех последующих рассуждениях, связанных с понятием аргумента, будем считать, что $z\neq 0$.

Заметим, что заданием модуля и аргумента комплексное число определяется однозначно; число $z=0$ – единственное комплексное число, которое определяется заданием только своего модуля ($|z|=0$).

С другой стороны, если задано комплексное число, то, очевидно, модуль этого числа всегда определен единственным образом в отличие от аргумента, который всегда определяется неоднозначно: если φ – некоторый аргумент числа z, то углы $\varphi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ тоже являются аргументами того же числа z. Например, аргументами числа $(+1 - i)$ являются углы $-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}, \dfrac{15\pi}{4}$ и т.д. (см. рис. 8).

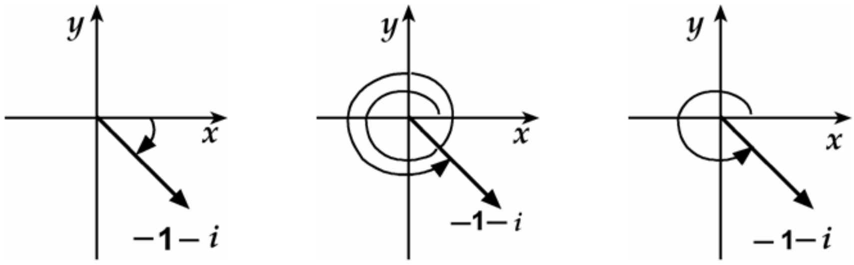


Рис. 8

Таким образом, для каждого числа z имеется бесконечное множество аргументов, любые два из которых отличаются друг от друга на число, кратное 2π.

Из определения тригонометрических функций (см. рис. 9) следует, что если $\varphi = \arg(a + ib)$, то имеет место следующая система

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{|z|}, \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{|z|}. \end{cases} \tag{5}$$

Справедливо и обратное: если выполняются равенства системы (5), то $\varphi = \arg(a + ib)$.

При решении задач на нахождение аргумента конкретного комплексного числа $z = a + ib$ полезно использовать геометрическую итерпретацию комплексного числа для определения той четверти, где находится точка $z = a + ib$, а после того, как это сделано, можно для нахождения аргумента воспользоваться одним (любым) из уравнений (5). Заметим, что аргументы чисел z и $\bar{z}$, $z \neq 0$, связаны соотношением:

$$\arg \bar{z} = -\arg z \text{ (см. рис. 2).}$$

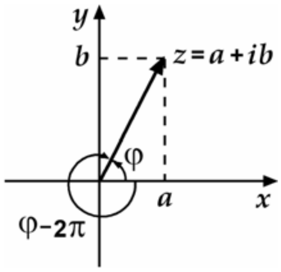


Рис. 9

Пример 5. Найти аргумент числа $z = 1 - i$.

Так как $\operatorname{Re} z = 1 > 0, \operatorname{Im} z = -1 < 0,$ то точка $z = 1 - i$ лежит в IV четверти. Поэтому достаточно такого решения одного из двух уравнений (5), которое является углом в IV четверти. Получаем $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{1+(-1)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \quad \varphi = -\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$

Заметим, что если $\varphi = \arg(a + ib), \quad a \neq 0,$ то из (5) следует, что $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{b}{a}.$ Обратное утверждение неверно. В самом деле, число $\varphi = \dfrac{3\pi}{4}$ является решением уравнения $\operatorname{tg}\varphi = -1,$ но не является аргументом числа $(1 - i).$

Пример 6. Найти аргумент числа $z = (-1 - i).$

Так как $\operatorname{Re} z = -1 < 0, \operatorname{Im} z = -1 < 0,$ то точка $z = -1 - i$ лежит в III четверти. Следовательно, надо найти такое решение уравнения $\operatorname{tg}\dfrac{-1}{-1} = 1,$ которое является углом в III четверти. Получаем

$$\varphi = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Заметим, что если $a = 0,$ то есть $z = bi,$ то либо $\arg z = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,$ $k \in \mathbb{Z}$ (если $b > 0$), либо $\arg z = \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi k,$ $k \in \mathbb{Z}$ (если $b < 0$).

