

## §2. Динамика движения по окружности

В инерциальной системе отсчета основным уравнением динамики материальной точки является второй закон Ньютона

$$m\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots \quad (14)$$

Рассмотрим подробнее *равномерное движение тела по окружности*, лежащей в плоскости  $XOY$  координатной системы. Из (7) и (14) следует, что при таком движении сумма сил, так же как и ускорение, в любой момент времени направлена к центру окружности. Тогда, переходя в (14) к скалярной форме записи, удобно перейти не к проекциям сил и ускорения на оси  $OX$ ,  $OY$  инерциальной системы отсчета, а на подвижное направление – направление внутренней нормали, считая положительным направление к центру окружности. Это приводит к соотношению

$$m a_n = m \frac{V^2}{R} = F_{1n} + F_{2n} + \dots \quad (15)$$

В рассматриваемом случае движение происходит в плоскости  $XOY$ . Тогда  $a_z = 0$  и из (14) находим, что сумма проекций сил на направление  $OZ$ , перпендикулярное плоскости окружности, равна нулю

$$0 = F_{1z} + F_{2z} + \dots \quad (16)$$

Таким образом, для решения задач динамики равномерного движения материальной точки по окружности необходимо:

1. в инерциальной системе отсчета привести «моментальную фотографию» движущегося тела и указать приложенные к нему силы и сообщаемое этими силами ускорение,
2. составить уравнения (14) – (16) и решить полученную систему.

Отметим, что из (15) следует – *произведение массы тела на нормальное (радиальное, центростремительное) ускорение равно сумме нормальных проекций всех действующих на тело сил.* Эту сумму, стоящую в правой части (15), часто неудачно называют центростремительной силой. Из (14) видно, что никакой центростремительной силы в природе не существует. В инерциальной системе отсчета движение по окружности всегда происходит под действием сил, обусловленных известными взаимодействиями. Такими силами являются силы тяжести, трения, реакции опоры и т.д.

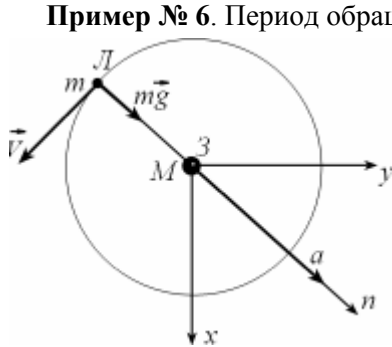


Рис. 8

**Пример № 6.** Период обращения Луны вокруг Земли в геоцентрической системе отсчета равен  $T = 27,32$  суток. Зная радиус Земли  $R = 6350$  км и ускорение свободного падения у ее поверхности  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>, найдите расстояние  $r$  до Луны.

**Решение.** Будем считать, что Луна движется вокруг Земли по круговой орбите радиуса  $r$  под действием силы притяжения к Земле. Тогда из второго закона Ньютона (рис. 8)  $m\vec{a} = m\vec{g}(r)$ ,

переходя к проекциям силы притяжения и ускорения на нормальное направление, получаем

$$m \frac{V^2}{r} = G \frac{mM}{r^2}, \quad V^2 = G \frac{M}{R^2} \frac{R^2}{r^2} = g \frac{R^2}{r^2}.$$

Линейная скорость связана с периодом обращения и радиусом орбиты  $V = \frac{2\pi r}{T}$ . Из двух последних соотношений находим

$$r = \left( \frac{gR^2T^2}{4\pi^2} \right)^{1/3} \approx 3,83 \cdot 10^5 \text{ км.}$$

**Пример № 7.** Автомобиль движется в горизонтальной плоскости

с постоянной по модулю скоростью по закруглению дороги – дуге окружности радиуса  $R = 200$  м. Коэффициент трения скольжения шин по дороге  $\mu = 0,1$ . При какой скорости  $V$  автомобиля его не будет «заносить»? Ускорение свободного падения  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

**Решение.** Инерциальная система отсчета и силы, действующие на автомобиль, показаны на (рис. 9). Такими силами являются: сила трения  $\vec{F}_{TP}$ , сила сопротивления  $\vec{F}_C$ , сила тяжести  $m\vec{g}$  и сила нормальной реакции  $\vec{N}$ .

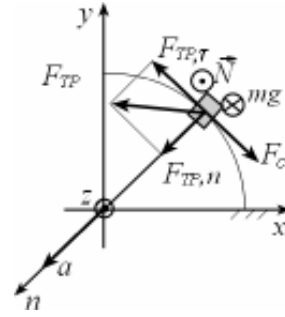


Рис. 9

По второму закону Ньютона  $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_C + \vec{F}_{TP}$ .

Так как автомобиль движется равномерно  $\vec{F}_{TP,\tau} = -\vec{F}_C$ . Перейдем к проекциям сил и ускорения на нормальное направление

$$m \frac{V^2}{R} = F_{TP,n} \quad (17)$$

и на вертикаль

$$0 = N - mg. \quad (18)$$

Величина силы трения ограничена  $F_{TP} \leq \mu N$ . Тогда из (17), (18) следует, что при движении по окружности в горизонтальной плоскости

$$m \frac{V^2}{R} \leq \mu mg.$$

Отсюда находим верхнюю оценку для скорости такого движения  $V \leq \sqrt{\mu g R} = \sqrt{0,1 \cdot 10 \cdot 200} \approx 14 \text{ м/с}$ .

**Пример № 8.** Автомобиль, трогаясь с места, равномерно набирает скорость, двигаясь по горизонтальному участку дороги, представляющему собой дугу в  $1/12$  окружности радиуса  $R = 100$  м. С какой наибольшей по величине  $V$  скоростью автомобиль может выехать на прямолинейный участок дороги, если коэффициент трения скольжения шин по дорожному покрытию  $\mu = 0,3$ ? Ускорение свободного падения  $g = 10 \text{ м/с}^2$ . Силу сопротивления считайте пренебрежимо малой.

**Решение.** На автомобиль в процессе разгона действуют силы: тяжести  $m\vec{g}$ , нормальной реакции  $\vec{N}$  и трения  $\vec{F}_{TP}$ , которая сонаправлена с ускорением  $\vec{a}$ . Проанализируем изменение вектора ускорения со вре-

менем. Для этого удобно обратиться к тангенциальной  $a_\tau$  и нормальной  $a_n$  составляющим ускорения. По условию  $a_\tau$  постоянна, следовательно величина скорости автомобиля в конце разгона и тангенциальная составляющая  $a_\tau$  связаны соотношением

$$V = \sqrt{2a_\tau s} = \sqrt{2a_\tau \frac{2\pi R}{12}}, \text{ отсюда } a_\tau = \frac{3V^2}{\pi R}.$$

Центростремительная составляющая ускорения определяется формулой  $a_n = \frac{V^2}{R}$ . Обе составляющие достигают наибольшего значения в конце участка разгона, где скорость наибольшая. По теореме Пифагора

$$a_{\max} = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{V^2}{R}\right)^2 + \left(\frac{3V^2}{\pi R}\right)^2} = \frac{V^2}{R} \sqrt{1 + \left(\frac{3}{\pi}\right)^2}.$$

Из второго закона Ньютона следует  $N = mg$ , а сила трения может сообщить наибольшее по величине ускорение

$$a_{\max} = \frac{F_{TP,\max}}{m} = \frac{\mu N}{m} = \mu g.$$

Тогда наибольшая скорость в конце участка разгона равна

$$V = \sqrt{\frac{\mu g R}{\sqrt{1 + \left(\frac{3}{\pi}\right)^2}}} \approx 15 \text{ м/с}.$$

**Пример № 9.** Массивный шарик, подвешенный на легкой нити, движется равномерно по окружности в горизонтальной плоскости (рис.10). Расстояние от точки подвеса нити до плоскости, в которой происходит движение, равно  $H$ . Найдите период  $T$  обращения шарика. Ускорение свободного падения  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

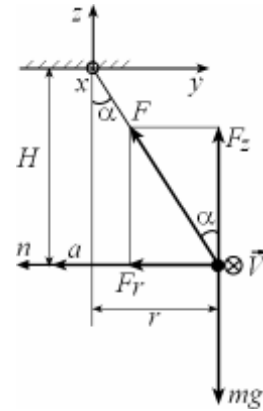


Рис. 10

**Решение.** Введем обозначения:  $L$  – длина нити,  $\alpha$  – угол, образуемый нитью с вертикалью,  $r = L \sin \alpha$  – радиус окружности, по которой движется шарик со скоростью  $V$ . Заметим, что  $H = L \cos \alpha$ . Обратимся к

динамике. На шарик действуют сила тяжести  $m\vec{g}$  и сила натяжения  $\vec{F}$  нити. Эти силы сообщают шарiku направленное к центру окружности нормальное ускорение, по величине равное  $a = \frac{4\pi^2}{T^2}r$ . По второму за-

кону Ньютона  $m\vec{a} = \vec{F} + m\vec{g}$ , переходя к проекциям сил и ускорения на нормальное направление и на вертикаль, получаем

$$m \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} r = F \sin \alpha, \quad (19)$$

$$0 = F \cos \alpha - mg. \quad (20)$$

С учетом (20) преобразуем (19) к виду

$$m \frac{4\pi^2}{T^2} L \sin \alpha = mg \cdot \operatorname{tg} \alpha, \quad \text{отсюда} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{H}{g}}.$$

**Пример № 10.** Кольцо, изготовленное из однородного резинового жгута длиной  $L$ , массой  $M$  и жесткостью  $k$ , вращается в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через центр кольца, с угловой скоростью  $\omega$ . Найдите радиус  $R$  вращающегося кольца.

**Решение.** Рассмотрим элементарный участок вращающегося кольца длиной  $\Delta l$ . Его масса  $\Delta m = \frac{M}{2\pi R} \Delta l$ . На выделенный участок дейст-

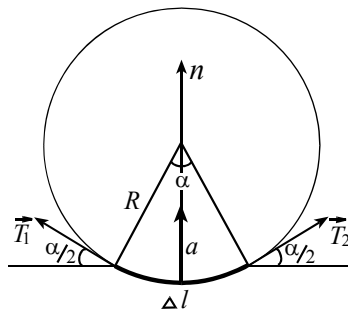


Рис. 11

вуют силы  $\vec{T}_1$  и  $\vec{T}_2$  (рис.11), направленные по касательным к кольцу и одинаковые по модулю  $T_1 = T_2 = T$ . По второму закону Ньютона  $\Delta m \cdot \vec{a} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2$ . Рассматриваемый элементарный участок под действием приложенных сил равномерно движется по окружности, следовательно, его ускорение в любой момент времени направлено к центру окружности и по величине равно  $\omega^2 R$ . Переходя в математической записи второго закона Ньютона к проекциям сил и ускорения на нормальное направление, получаем

$$\frac{M \Delta l}{2\pi R} \omega^2 R = 2T \sin(\alpha/2).$$

Величина  $T$  упругой силы (силы натяжения) связана с удлинением  $(2\pi R - L)$  кольца законом Гука  $T = k(2\pi R - L)$ . При малых углах  $\sin(\alpha/2) \approx \alpha/2 = \Delta l/(2R)$ . С учетом этих соотношений уравнение движения принимает вид  $\frac{M}{2\pi R} \omega^2 \Delta l = 2k(2\pi R - L) \frac{\Delta l}{2R}$ .

Отсюда  $R = \frac{2\pi k L}{4\pi^2 k - \omega^2 M}$ . Из последней формулы следует, что при

$\omega = 2\pi \sqrt{\frac{k}{M}}$  кольцо должно неограниченно растягиваться, однако этого не случится, так как закон Гука нарушится уже при небольших удлинениях, а с ростом  $\omega$  кольцо разорвется.

**Пример № 11.** Определите вес  $P$  тела массой  $m = 1\text{ кг}$  на географической широте  $\varphi$ . Ускорение свободного падения  $g = 10\text{ м/с}^2$ . Землю считайте однородным шаром радиуса  $R = 6350\text{ км}$ .

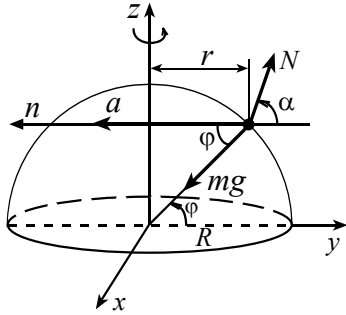


Рис. 12

**Решение.** Напомним, что вес  $\vec{P}$  тела – это сила, с которой тело действует на опору или подвес. Допустим, что тело лежит на поверхности вращающейся Земли, на него действуют сила тяжести  $m\vec{g}$ , направленная к центру Земли, и сила реакции  $\vec{N}$  (рис.12).

По третьему закону Ньютона  $\vec{P} = -\vec{N}$ . Поэтому для определения веса тела найдем силу реакции  $\vec{N}$ . В инерциальной системе отсчета тело равномерно движется по окружности радиуса  $r = R \cdot \cos \varphi$  с периодом одни сутки, т.е.  $T = 86400\text{ с}$  и циклической частотой

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 7,3 \cdot 10^{-5}\text{ с}^{-1}.$$

Ускорение тела по величине равно  $a_n = \omega^2 \cdot r = \omega^2 \cdot R \cdot \cos \varphi$  и направлено к оси вращения Земли. Из этого следует, что равнодействующая сил тяжести и реакции Земли тоже должна быть направлена к оси вращения Земли. Тогда сила реакции образует с перпендикуляром к оси вращения некоторый угол  $\alpha \neq \varphi$ , иначе сумма сил, приложенных

к телу, а следовательно и ускорение были бы равны нулю. По второму закону Ньютона  $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}$ .

Перейдем к проекциям сил и ускорения на нормальное направление

$$m\omega^2 R \cos \varphi = mg \cos \varphi - N \cos \alpha,$$

и на направление, перпендикулярное плоскости, в которой лежит окружность,  $0 = -mg \sin \varphi + N \sin \alpha$ .

Исключая  $\alpha$  из двух последних соотношений, находим вес тела

$$P = N = \sqrt{(mg)^2 - m^2 \omega^2 R (2g - \omega^2 R) \cos^2 \varphi}.$$

**Пример № 12.** Маленький деревянный шарик прикреплен с помощью нерастяжимой нити длиной  $l = 30$  см ко дну цилиндрического сосуда с водой. Расстояние от центра дна до точки закрепления нити  $r = 20$  см. Сосуд раскручивают вокруг вертикальной оси, проходящей через центр дна. При какой угловой скорости вращения нить отклонится от вертикали на угол  $\alpha = 30^\circ$ ? Ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

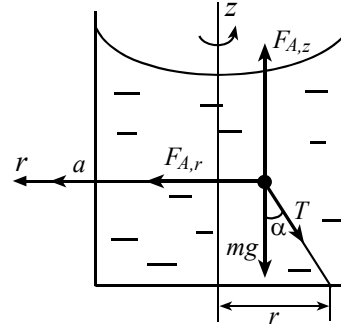


Рис. 13

**Решение.** Нить с шариком отклонится к оси вращения. Действительно, на шарик будут действовать три силы: сила тяжести  $m\vec{g}$ , сила натяжения  $\vec{T}$  нити и сила Архимеда  $\vec{F}$  (рис. 13). Найдем эту силу. Обозначим объем шарика  $V$ , плотность дерева, из которого изготовлен шарик  $\rho_w$ , плотность воды  $\rho_B$ , и рассмотрим движение жидкости до погружения в нее шарика. Любой элементарный объем воды равномерно движется по окружности в горизонтальной плоскости. Следовательно, вертикальная составляющая суммы сил давления (силы Архимеда)  $F_{A,z}$  уравнивает силу тяжести, действующую на жидкость в рассматриваемом объеме, горизонтальная составляющая  $F_{A,r}$  сообщает этой жидкости центростремительное ускорение. При замещении жидкости шариком эти составляющие не изменяются. Тогда вертикальная составляющая силы Архимеда, действующей на шарик, по величине равна  $F_{A,z} = \rho_B V g$ , а направленная к оси вращения составляющая силы Архимеда по величине равна  $F_{A,r} = \rho_B V \omega^2 (r - l \sin \alpha)$ .

Под действием приложенных сил шарик движется равномерно по окружности радиуса  $(r - l \sin \alpha)$  в горизонтальной плоскости. Из второго закона Ньютона

$$m \vec{a} = m \vec{g} + \vec{T} + \vec{F},$$

переходя к проекциям сил и ускорения на вертикальную ось, находим

$$\rho_B V g - \rho_u V g - T \cos \alpha = 0,$$

проектируя силы и ускорения в горизонтальной плоскости на нормальное направление, получаем

$$\rho_u V \omega^2 (r - l \sin \alpha) = \rho_B V \omega^2 (r - l \sin \alpha) - T \sin \alpha.$$

Исключая  $T$  из двух последних соотношений, определяем искомую угловую скорость

$$\omega = \sqrt{\frac{g \operatorname{tg} \alpha}{r - l \sin \alpha}} \approx 10,7 \text{ с}^{-1}.$$

**Пример № 13.** Определите радиус  $R$  горбатого мостика, имеющего вид дуги окружности, если известно, что при скорости  $V = 90 \text{ км/ч}$  вес автомобиля в верхней точке мостика вдвое меньше веса на горизонтальной дороге. Ускорение свободного падения  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

**Решение.** При движении по горизонтальной дороге вес тела равен силе тяжести.

Обратимся к движению автомобиля по мостику. Инерциальная система отсчета и силы, действующие на автомобиль и на мостик, показаны на рис. 14.

Для автомобиля в верхней точке мостика по второму закону Ньютона  $m \vec{a} = m \vec{g} + \vec{N}$ . Перейдем в этом уравнении к проекциям сил и ускорения

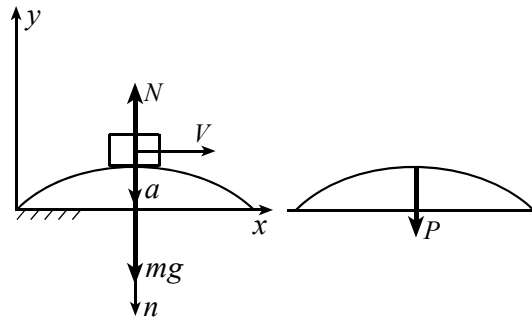


Рис. 14

На нормальное направление  $m \frac{V^2}{R} = mg - N$ . По условию  $P = \frac{mg}{2}$ , а

а по третьему закону Ньютона  $\vec{N} = -\vec{P}$ , тогда  $N = \frac{mg}{2}$ .



Из полученных соотношений находим  $m \frac{V^2}{R} = \frac{mg}{2}$ , отсюда

$$R = \frac{2 \cdot V^2}{g} = \frac{2 \cdot 25^2}{10} = 125 \text{ м.}$$

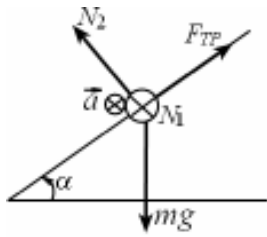


Рис. 15

Рассмотрим два примера, в которых тела движутся по окружности неравномерно, при этом тангенциальное ускорение тоже изменяется. В этом случае наряду с законом Ньютона полезно привлекать закон изменения (или сохранения) механической энергии.

**Пример № 14.** По длинной проволочной винтовой линии радиуса  $R$  с шагом  $H$ , ось которой вертикальна, скользит бусинка. Коэффициент трения скольжения бусинки по проволоке равен  $\mu$  ( $\mu < H / 2 \pi R$ ). Найдите установившуюся скорость  $V$  скольжения бусинки. Ускорение свободного падения  $g$ .

**Решение.** На бусинку действуют силы: тяжести  $m \vec{g}$ , нормальной реакции  $\vec{N}$  и трения  $F_{тр} = \mu N$ , при этом  $\vec{N} = \vec{N}_1 + \vec{N}_2$ , здесь  $\vec{N}_1$  – горизонтальная составляющая, а  $\vec{N}_2$  лежит в одной плоскости с  $m \vec{g}$  и  $\vec{F}_{тр}$  (рис. 15). Из второго закона Ньютона следует, что с ростом величины скорости будет расти величина силы трения, так что естественно ожидать выхода движения на установившийся режим скольжения с некоторой скоростью  $V$ . Для определения этой скорости перейдем в инерциальную систему отсчета (ИСО), движущуюся по вертикали вниз со скоростью  $V \sin \alpha$ ,  $\alpha$  – угол наклона вектора скорости к горизонту,  $\operatorname{tg} \alpha = H / 2 \pi R$ . В выбранной ИСО бусинка равномерно движется по окружности радиуса  $R$  со скоростью  $V \cos \alpha$ , при этом ускорение бусинки направлено к оси винтовой линии и по величине равно  $(V \cos \alpha)^2 / R$ . Из второго закона Ньютона

$$m \vec{a} = m \vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{F}_{тр},$$

переходя к проекциям сил и ускорения на нормальное направление, находим

$m \frac{(V \cos \alpha)^2}{R} = N_1$ . В вертикальной плоскости  $\vec{0} = m \vec{g} + \vec{N}_2 + \vec{F}_{TP}$ , переходя к проекциям сил на взаимно ортогональные направления, находим

$$F_{TP} = m g \sin \alpha, \quad N_2 = m g \cos \alpha.$$

Из этих соотношений с учетом  $F_{TP} = \mu \sqrt{N_1^2 + N_2^2}$  получаем

$$V = (g R / \mu)^{1/2} [(tg^2 \alpha - \mu^2)(tg^2 \alpha + 1)]^{1/4}.$$

**Пример № 15.** Гладкий желоб состоит из горизонтальной части  $AB$  и дуги окружности  $BD$  радиуса  $R = 5\text{ м}$  (рис. 16). Шайба скользит по горизонтальной части со скоростью  $V_0 = 10\text{ м/с}$ . Определите модуль  $a$  ускорения шайбы в точке  $C$  и угол  $\beta$ , который вектор  $\vec{a}$  ускорения шайбы в этот момент составляет с нормалью. Радиус  $OC$  образует с вертикалью угол  $\alpha = 60^\circ$ . Ускорение свободного падения  $g = 10\text{ м/с}^2$ .

**Решение.** Для нахождения ускорения  $\vec{a}$  шайбы в точке  $C$  найдем тангенциальную  $a_\tau$  и нормальную  $a_n$  составляющие ускорения в этой точке. На тело, движущееся в вертикальной плоскости по дуге  $BD$  (рис. 17), в любой точке действуют силы тяжести  $m\vec{g}$  и реакции опоры  $\vec{N}$ . По второму закону Ньютона  $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}$ .

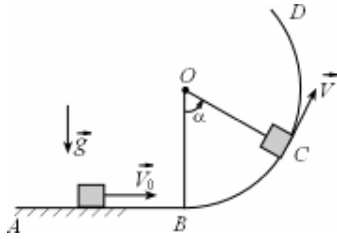


Рис. 16

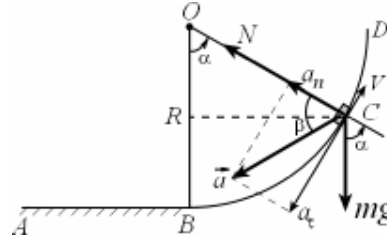


Рис. 17

Перейдем в этом уравнении к проекциям сил и ускорения на тангенциальное направление  $ma_\tau = -mg \sin \alpha$ .

Отсюда  $a_\tau = -g \sin \alpha = -10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx -8,7\text{ м/с}^2$ . Для определения

$a_n = \frac{V^2}{R}$  найдем величину  $V$  скорости шайбы в точке  $C$ . Обратимся

к энергетическим соображениям. При движении по горизонтальной части желоба скорость тела не изменяется вследствие отсутствия трения, а на вертикальной части желоба (как и на горизонтальной) сила нормальной реакции не совершает работу, т.к. эта сила перпендикулярна скорости. Следовательно механическая энергия (сумма кинетической и потенциальной) сохраняется.

Потенциальную энергию шайбы на горизонтальной части желоба будем считать равной нулю. Тогда по закону сохранения механической энергии

$$m \frac{V_0^2}{2} = m \frac{V^2}{2} + mgR(1 - \cos \alpha),$$

отсюда

$$a_n = \frac{V^2}{R} = \frac{V_0^2}{R} - 2g(1 - \cos \alpha) = \frac{10^2}{5} - 2 \cdot 10 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 10 \text{ м/с}^2.$$

Величину  $a$  ускорения шайбы в точке  $C$  найдем по теореме Пифагора

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_n^2} \approx 13,2 \text{ м/с}^2.$$

В точке  $C$  вектор ускорения  $\vec{a}$  образует с нормалью угол  $\beta$  такой, что

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{|a_r|}{a_n} \approx 0,87, \text{ отсюда } \beta \approx 41^\circ.$$

**Пример № 16.** На горизонтальной поверхности лежит полушар массой  $M = 100$  кг. С его верхней точки без трения с нулевой начальной скоростью скользит шайба массой  $m = 10$  г. Из-за трения между полушаром и горизонтальной поверхностью движение полушара начинается при  $\alpha = 10^\circ$ . Найдите коэффициент  $\mu$  трения скольжения полушара по поверхности. Ускорение свободного падения  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

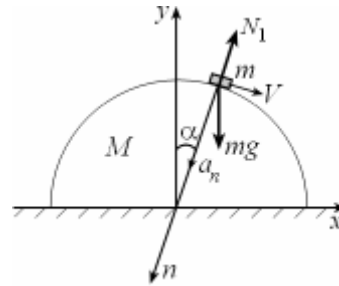


Рис. 18

**Решение.** Рассмотрим силы, действующие на каждое из тел. На шайбу действуют сила тяжести  $m\vec{g}$  и сила нормальной реакции  $\vec{N}_1$  (рис.18).

Из второго закона Ньютона  $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}_1$ .

Переходя к проекциям сил и ускорения на нормальное направление, в момент начала движения полушара получаем  $m \frac{V^2}{R} = mg \cos \alpha - N_1$ .

По закону сохранения энергии  $\frac{mV^2}{2} = mgR(1 - \cos \alpha)$ .

Из этих соотношений находим величину действующей на шайбу в этот момент силы нормальной реакции

$N_1 = mg(3 - 2 \cos \alpha)$ . На полушар дей-

ствуют силы: тяжести  $M\vec{g}$ , нормальной

реакции  $\vec{N}_2$ , трения  $\vec{F}_{TP}$  и вес  $\vec{P}$  шай-

бы (рис.19). По третьему закону Ньюто-

на  $\vec{P} = -\vec{N}_1$ . В момент начала движе-

ния полушара из второго закона Ньютона

$M\vec{a}_1 = M\vec{g} + \vec{P} + \vec{N}_2 + \vec{F}_{TP}$ , переходя к

проекциям сил и ускорения  $\vec{a}_1 = \vec{0}$  по-

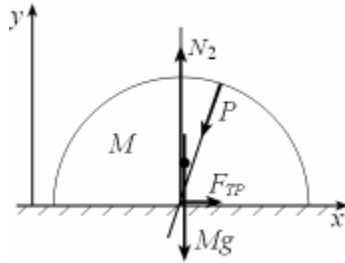


Рис. 19

лушара на вертикальное направление с учетом равенства  $P = N_1$  получаем  $N_2 = Mg + P \cos \alpha = Mg + mg(3 - 2 \cos \alpha) \cos \alpha$ .

Переход к проекциям сил и ускорения полушара на горизонтальное направление позволяет определить величину силы трения

$$F_{TP} = P \sin \alpha = mg(3 - 2 \cos \alpha) \sin \alpha.$$

В момент начала движения полушара величина силы трения связана с величиной силы нормальной реакции соотношением  $F_{TP} = \mu \cdot N_2$ . От-

сюда  $\mu = \frac{F_{TP}}{N_2} = \frac{m(3 - 2 \cos \alpha) \sin \alpha}{M + m(3 - 2 \cos \alpha) \cos \alpha} \approx 0,17$ .