§9. Логарифмические неравенства. Неравенства вида $\log_a f(x) > 0$ и $\log_a f(x) > \log_a g(x)$

Пусть $f(x) > 0, f(x)$ непрерывна на $(c; d)$, тогда $\log_a f(x)$ тоже непрерывен на $(c; d)$, и для решения неравенства $\log_a f(x) > 0$ применим метод интервалов. При решении этого неравенства значения $f(x)$ в “пробных” точках придется сравнивать с единицей. Если “пробные” точки не очень удобные, то вычисления могут оказаться довольно громоздкими. Поэтому с самого начала учтем это.

Рассмотрим неравенство $\log_a f(x) > 0(<0)$, где a – заданное положительное число, $a \neq 1$.

ОДЗ: $f(x) > 0$.

Покажем, что имеет место условие равносильности

$$\boxed{\log_a f(x) > 0(<0) \Leftrightarrow (a-1)(f(x)-1) > 0(<0) \text{ в ОДЗ}} \qquad \text{(УР Л4)}$$

Действительно,

1. Если $a > 1$, то $\log_a f(x) > 0(<0)$ тогда и только тогда, когда $f(x) > 1(<1)$, т. е. $(a-1)(f(x)-1) > 0(<0)$.

2. Если $0 < a < 1$, то $\log_a f(x) > 0(<0)$ тогда и только тогда, когда $f(x) < 1(>1)$, т. е. опять $(a-1)(f(x)-1) < 0(>0)$. И, наоборот.

Если $(a-1)(f(x)-1) > 0(<0)$, то

1. при $a > 1$ имеем $f(x) > 1(<1)$, а тогда $\log_a f(x) > 0(<0)$,

2. при $0 < a < 1$ имеем $f(x) < 1(>1)$, а тогда $\log_a f(x) > 0(<0)$.

Отсюда еще следует, что

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{знак } \log_a f(x) \text{ совпадает со знаком} \\ \text{произведения } (a-1)(f(x)-1) \text{ в ОДЗ}\end{array}} \qquad \text{(УР Л5)}$$

Можно записать полное условие равносильности, включающее ОДЗ:

$$\boxed{\log_a f(x) > 0(<0) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ (a-1)(f(x)-1) > 0(<0). \end{cases}} \qquad \text{(УР Л5*)}$$

Рассмотрим неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$, где $a > 0, a \neq 1$.

ОДЗ: $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$

Аналогично доказывается, что верно и такое условие равносильности

$$\boxed{\begin{array}{l}\log_a f(x) > (<) \log_a g(x) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (a-1)\big(f(x)-g(x)\big) > 0 (< 0)\end{array} \text{ в ОДЗ}} \qquad \text{(УР Л6)}$$

а также полное условие равносильности

$$\boxed{\log_a f(x) > (<) \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ (a-1)\big(f(x)-g(x)\big) > 0 (< 0). \end{cases}} \qquad \text{(УР Л6*)}$$

Отсюда следует, что

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{знак разности } \log_a f(x) - \log_a g(x) \text{ совпадает со} \\ \text{знаком произведения } (a-1)\big(f(x)-g(x)\big) \text{ в ОДЗ}\end{array}} \qquad \text{(УР Л7)}$$

При решении простейших логарифмических неравенств, конечно, можно не использовать (УР Л4) и (УР Л6). Однако, (УР Л4) и (УРЛ6) дают возможность просто справиться с неравенствами, решение которых обычным способом потребует гораздо больше вычислений.

Пример 19. Решите неравенство

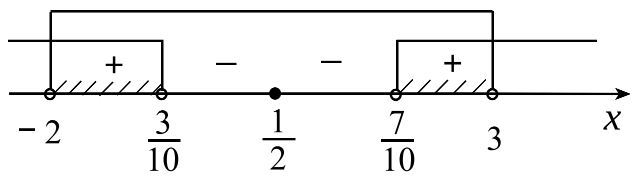
$$\frac{\lg\left(3x^2-3x+7\right)-\lg\left(6+x-x^2\right)}{(10x-7)(10x-3)} \geq 0 .$$

♦ ОДЗ: $\begin{cases} 3x^2-3x+7>0 \Leftrightarrow x \in R, \\ -x^2+x+6>0 \Leftrightarrow x \in (-2;3). \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-2;3).$

$\dfrac{\lg\left(3x^2-3x+7\right)-\lg\left(-x^2+x+6\right)}{(10x-7)(10x-3)} \geq 0 \Leftrightarrow$ В ОДЗ, в силу (УР Л7),

$$\frac{3x^2-3x+7+x^2-x-6}{\left(x-\frac{7}{10}\right)\left(x-\frac{3}{10}\right)} = \frac{(2x-1)^2}{\left(x-\frac{3}{10}\right)\left(x-\frac{7}{10}\right)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(-\infty;\frac{3}{10}\right) \cup \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup \left(\frac{7}{10};+\infty\right) \Rightarrow x \in \left(-2;\frac{3}{10}\right) \cup \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup \left(\frac{7}{10};3\right) \Rightarrow$$



Ответ: $\left(-2;\frac{3}{10}\right)\cup\left\{\frac{1}{2}\right\}\cup\left(\frac{7}{10};3\right)$.

В этом примере разность логарифмов ***не меняет*** знак при переходе через точку $x=\frac{1}{2}$, а следующие нули находятся близко. “Пробные” точки подставлять затруднительно. ♦

Пример 20. (МГУ, 1998, мех – мат.) Решите неравенство

$$\log_2\left(\sqrt{x+\frac{11}{2}}+\frac{x}{2}+1\right)\cdot\log_3\left(-2x-x^2\right)\geq\log_3\left(\frac{|x|}{3}+\frac{3}{2}\right)\cdot\log_2\left(-2x-x^2\right).$$

$$♦\text{ОДЗ: }\begin{cases}x+5{,}5\geq 0\Leftrightarrow x\geq -5{,}5;\\ \sqrt{x+5{,}5}+\dfrac{x+2}{2}>0,\\ -2x-x^2>0\Leftrightarrow x(x+2)<0\Leftrightarrow x\in(-2;0).\end{cases}\Leftrightarrow x\in(-2;0).$$

$$\log_2\left(\sqrt{x+\frac{11}{2}}+\frac{x}{2}+1\right)\log_3\left(-2x-x^2\right)\geq\log_3\left(\frac{|x|}{2}+\frac{3}{2}\right)\log_2\left(-2x-x^2\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\log_2\left(\sqrt{x+\frac{11}{2}}+\frac{x}{2}+1\right)\log_2\left(-2x-x^2\right)\geq\log_2\left(\frac{|x|}{2}+\frac{3}{2}\right)\log_2\left(-2x-x^2\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\log_2\left(-2x-x^2\right)\left(\log_2\left(\sqrt{x+\frac{11}{2}}+\frac{x}{2}+1\right)-\log_2\left(\frac{|x|}{2}+\frac{3}{2}\right)\right)\geq 0\Leftrightarrow$$

В ОДЗ, в силу (УР Л5) и (УР Л7),

$$\left(-2x-x^2-1\right)\left(\sqrt{x+\frac{11}{2}}+\frac{x}{2}+1-\frac{|x|}{2}-\frac{3}{2}\right)\geq 0\Leftrightarrow$$

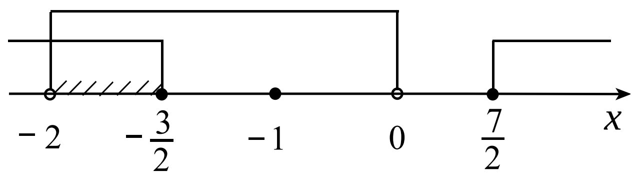
$$\Leftrightarrow (x+1)^2\left(\sqrt{x+\frac{11}{2}}+x-\frac{1}{2}\right)\le 0 \ \ (|x|=-x \text{ в ОДЗ}) \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2\left(\sqrt{x+\frac{11}{2}}-\left(\frac{1}{2}-x\right)\right)\le 0 \Leftrightarrow \text{ Т. к. } \left(\frac{1}{2}-x\right)>0 \text{ в ОДЗ}$$

$$(x+1)^2\left(x+\frac{11}{2}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\right)\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2\left(-x^2+2x+\frac{21}{4}\right)\le 0 \Leftrightarrow (x+1)^2\left(x-\frac{7}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)\ge 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\in\left(\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right]\cup\left[\frac{7}{2};+\infty\right)\cup\{-1\}\right)\cap \text{ ОДЗ. Учитываем ОДЗ:}$$



Получаем

Ответ: $\left(-2;-\frac{3}{2}\right]\cup\{-1\}$. ♦

Пример 21. (МФТИ, 1992) $\frac{1}{x}\log_7\left(\frac{9}{2}-2\cdot 7^{-x}\right)>1$.

♦ ОДЗ: $\frac{9}{2}-2\cdot 7^{-x}>0 \Leftrightarrow \frac{9}{2}\cdot 7^{x}-2>0 \Leftrightarrow x>\log_7\frac{4}{9}$.

Тогда в ОДЗ $\frac{1}{x}\log_7\left(\frac{9}{2}-2\cdot 7^{-x}\right)>1 \Leftrightarrow \frac{1}{x}\log_7\left(\frac{9}{2}-2\cdot 7^{-x}\right)>\frac{x}{x} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_7\left(\frac{9}{2}-2\cdot 7^{-x}\right)-x}{x}\equiv\frac{\log_7\left(\frac{9}{2}-2\cdot 7^{-x}\right)-\log_7 7^{x}}{x}>0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow$ В ОДЗ, в силу (УР Л7),

$$\frac{\frac{9}{2}-2\cdot 7^{-x}-7^{x}}{x}>0 \Leftrightarrow \frac{7^{2x}-\frac{9}{2}\cdot 7^{x}+2}{x}<0 \Leftrightarrow \frac{\left(7^{x}-4\right)\left(7^{x}-\frac{1}{2}\right)}{x}<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(7^{x}-7^{\log_7 4}\right)\left(7^{x}-7^{\log_7 \frac{1}{2}}\right)}{x}<0 \Leftrightarrow$$ В силу (УР П2),

$$\frac{\left(x-\log_7 4\right)\left(x-\log_7 \frac{1}{2}\right)}{x}<0 \Leftrightarrow x\in\left(-\infty;\log_7 \frac{1}{2}\right)\cup\left(0;\log_7 4\right)\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ С учётом ОДЗ, $x\in\left(\log_7 \frac{4}{9};\log_7 \frac{1}{2}\right)\cup\left(0;\log_7 4\right)$.

Ответ: $\left(\log_7 \frac{4}{9};\log_7 \frac{1}{2}\right)\cup\left(0;\log_7 4\right)$. ♦