§7. Показательные неравенства

Рассмотрим неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$.

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – непрерывные функции на некотором промежутке X, где задано число $a>0$. Тогда $a^{f(x)}, a^{g(x)}$ – тоже непрерывны на X и к неравенству $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ применим метод интервалов. Его решение зависит от того, $a>1$ или $a<1$.

1) Если $a>1$, то $f(x)>g(x)$ и $(a-1)(f(x)-g(x))>0$.

2) Если $0<a<1$, то $f(x)<g(x)$ и опять $(a-1)(f(x)-g(x))>0$.

Верно и обратное:

1. если $(a-1)(f(x)-g(x))>0$, то при $a>1$ имеем $f(x)>g(x)$ и $a^{f(x)} > a^{g(x)}$;

2. если $0<a<1$, то $f(x)<g(x)$ и опять $a^{f(x)} > a^{g(x.)}$.

Таким образом, мы вывели условие равносильности

$$\boxed{a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow (a-1)(f(x)-g(x))>0} \qquad \text{(УР П1)}$$

При рассмотрении неравенства $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ меняется знак неравенства в (УР П1), и мы видим, что

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{знак разности } a^{f(x)} - a^{g(x)} \text{ совпадает со знаком} \\ \text{произведения } (a-1)(f(x)-g(x))\end{array}} \qquad \text{(УР П2)}$$

Пример 12. (МГУ, 1999, ф – т почв.) Решите неравенство

$$3 \cdot 4^{\sqrt{2-x}} + 3 < 10 \cdot 2^{\sqrt{2-x}}.$$

♦ $3 \cdot 2^{2\sqrt{2-x}} - 10 \cdot 2^{\sqrt{2-x}} + 3 < 0 \Leftrightarrow \left(2^{\sqrt{2-x}} - 3\right)\left(2^{\sqrt{2-x}} - \frac{1}{3}\right) < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^{\sqrt{2-x}} - 3 < 0 \Leftrightarrow 2^{\sqrt{2-x}} < 3 \Leftrightarrow 0 \le \sqrt{2-x} < \log_2 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 \le 2-x < \log_2^2 3 \Leftrightarrow 2 - \log_2^2 3 < x \le 2.$

Ответ: $\left(2-\log_2^2 3; 2\right]$. ♦

Пример 13. (МГУ, 1999, мехмат.). Решите неравенство

$$3^{(x+3)^2}+\frac{1}{9}\le 3^{x^2-2}+27^{2x+3}.$$

♦ $3^{(x+3)^2}+\frac{1}{9}\le 3^{x^2-2}+27^{2x+3} \Leftrightarrow 3^{x^2+6x+9}+3^{-2}\le 3^{x^2-2}+3^{6x+9} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3^{x^2}\left(3^{6x+9}-3^{-2}\right)-\left(3^{6x+9}-3^{-2}\right)\le 0 \Leftrightarrow \left(3^{x^2}-3^0\right)\left(3^{6x+9}-3^{-2}\right)\le 0 \Leftrightarrow$

В силу (УР П2), $x^2\left(6x+9+2\right)\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x\le -\dfrac{11}{6}. \end{array}\right.$

Ответ: $\left(-\infty;-\frac{11}{6}\right]\cup\{0\}$. ♦

Пример 14. Решите неравенство $\dfrac{x^2+x-2}{\left(3^x-1\right)\left(2^{x^2}-16\right)}\ge 0.$

♦ $\dfrac{x^2+x-2}{\left(3^x-1\right)\left(2^{x^2}-16\right)}\ge 0 \Leftrightarrow$ В силу (УР П2),

$$\frac{(x+2)(x-1)}{(x-0)\left(x^2-4\right)}\ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ne -2, \\ \dfrac{x-1}{x(x-2)}\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in(0;1]\cup(2;+\infty).$$

Ответ: $(0;1]\cup(2;+\infty)$. ♦

Пример 15. (МГУ, 2000, почв.) Решите неравенство $2^{x^2}\cdot 3^x<6.$

♦ $2^{x^2}\cdot 3^x<6 \Leftrightarrow 2^{x^2}\cdot 2^{x\log_2 3}<2^{\log_2 6} \Leftrightarrow 2^{x^2+x\log_2 3}<2^{\log_2 6} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+x\log_2 3-\log_2 6<0 \Leftrightarrow (x-1)(x+\log_2 6)<0 \Leftrightarrow -\log_2 6<x<1.$

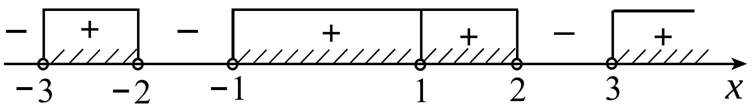
Ответ: $(-\log_2 6;1)$. ♦

Пример 16. Решите неравенство

$$\frac{\left(3^{x^2}-3\right)\left(2^{-x}-2^3\right)\left(4^x-4^{x^2+2x-2}\right)}{\left(x^2-5x+6\right)}>0.$$

♦ $\frac{\left(3^{x^2}-3\right)\left(2^{-x}-2^3\right)\left(4^x-4^{x^2+2x-2}\right)}{\left(x^2-5x+6\right)}>0 \Leftrightarrow$ В силу (УР П2),

$$\frac{\left(x^2-1\right)\left(-x-3\right)\left(x-x^2-2x+2\right)}{(x-2)(x-3)}>0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2(x+1)(x+3)(x+2)}{(x-2)(x-3)}>0 \Leftrightarrow$$



С рисунка снимаем

Ответ: $(-3;-2)\cup(-1;1)\cup(1;2)\cup(3;+\infty)$.♦

Пример 17. (МГУ,1973, биофак) Найти все значения параметра a, для каждого из которых неравенство $4^x-a\cdot 2^x-a+3\le 0$ имеет хотя бы одно решение.

♦Пусть $2^x=t>0$, тогда неравенство примет вид $t^2-at-a+3\le 0$. Прежде всего, неравенство имеет решение, если дискриминант неотрицателен, т. е.

$D=a^2+4a-12=(a+6)(a-2)\ge 0 \Leftrightarrow a\in(-\infty;-6]\cup[2;+\infty)$.

При этом, $t^2-at-a+3\le 0 \Leftrightarrow t\in\left[\frac{a-\sqrt{D}}{2}=t_1;\frac{a+\sqrt{D}}{2}=t_2\right]$.

Теперь задача состоит в том, чтобы найти все a, при которых неравенство верно хотя бы при одном положительном значении t. Для этого необходимо и достаточно, чтобы больший корень был положительным, т. е.

$$t_2=\frac{a+\sqrt{a^2+4a-12}}{2}>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 0, \\ a^2 + 4a - 12 \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow a \geq 2; \\ \begin{cases} a \leq 0, \\ a^2 + 4a - 12 - a^2 > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing; \end{array}\right. \Leftrightarrow a \geq 2 \Rightarrow$$

Ответ: $[2;+\infty)$. ♦