§4. Логарифмические уравнения

Логарифмические уравнения считаются сложными. Во-первых, потому, что у логарифма есть область определения. Во-вторых, подлога1рифмические выражения могут быть любыми функциями, и надо помнить, что последующие преобразования могут быть неравносильными (например, возведение в квадрат), и потеря или приобретение корней в промежуточных выкладках уже не связано с ОДЗ логарифмов. Поэтому при решении простых логарифмических уравнений лучше пользоваться равносильными преобразованиями. В противном случае надо записать ОДЗ уравнения, но не надо находить его (решить все неравенства, связанные с ОДЗ, бывает намного труднее, чем решить само уравнение, а иногда и просто невозможно). После нахождения корней необходимо в этом случае сделать проверку. Если корень не принадлежит ОДЗ, то он не может быть решением. Если же корень принадлежит ОДЗ, то надо подставить его в уравнение.

Основными типами логарифмических уравнений являются следующие уравнения. Для любых $a>0, a\neq 1$

1. $$\log_a f(x)=\log_a g(x)\Leftrightarrow\begin{cases} f(x)=g(x),\\ f(x)>0.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} f(x)=g(x),\\ g(x)>0.\end{cases}\qquad \text{(УР Л1)}$$

Из двух систем удобно выбирать ту, которая проще.

2. $g(\log_a f(x))=0.$

Пример 6. (МГУ, 1997, биофак) $\log_3 x+\log_3(x+1)=1.$

♦

$$\log_3 x+\log_3(x+1)=1\Leftrightarrow\begin{cases} x>0,\\ \log_3 x(x+1)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x>0,\\ x^2+x=3.\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{-1+\sqrt{13}}{2}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{13}-1}{2}$. ♦

Пример 7. (МГУ, 1998, ф – т почв.)

♦ $\log_{0,5}\left(\log_4\frac{1}{x}\right)+\log_4\left(\log_2\left(16x^2\right)\right)=0.$

$$\log_{0,5}\left(\log_4\frac{1}{x}\right)+\log_4\left(\log_2\left(16x^2\right)\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow-\log_2\left(-\frac{\log_2 x}{2}\right)+\frac{\log_2\left(4+2\log_2 x\right)}{2}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x < 0, \\ \log_2\left(4 + 2\log_2 x\right) = \log_2\left(-\dfrac{\log_2 x}{2}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x < 0, \\ 4 + 2\log_2 x = \dfrac{1}{4}\log_2^2 x \Leftrightarrow \log_2 x = 4 \pm 4\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x = 4 - 4\sqrt{2} \Leftrightarrow x = 2^{4-4\sqrt{2}}.$$

Ответ: $2^{4-4\sqrt{2}}$. ♦

Пример 8. (МГУ, 1999, псих. ф – т) $x^{\log_7 4} + 5\cdot 2^{\log_7 x} - 4 = 0.$

♦ $x^{\log_7 4} + 5\cdot 2^{\log_7 x} - 4 = 0 \Leftrightarrow \left(2^{\log_2 x}\right)^{\log_7 4} + 5\cdot 2^{\log_7 x} - 4 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^{2\log_7 x} + 5\cdot 2^{\log_7 x} - 4 = 0 \Leftrightarrow \left(2^{\log_7 x}\right)^2 + 5\cdot 2^{\log_7 x} - 4 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^{\log_7 x} = \dfrac{-5+\sqrt{41}}{2} \Leftrightarrow \log_7 x = \log_2 \dfrac{\sqrt{41}-5}{2} \Leftrightarrow x = 7^{\log_2 \frac{\sqrt{41}-5}{2}}.$

Ответ: $7^{\log_2 \frac{\sqrt{41}-5}{2}}$. ♦

Особняком стоят уравнения и неравенства, которые нельзя отнести ни к показательным, ни к логарифмическим. Они содержат функции вида $\log_{a(x)} f(x)$ и $\left(a(x)\right)^{f(x)}$.