§3. Монотонные функции. Четные и нечетные функции

Числовая функция $f(x)$, определённая на множестве X, называется возрастающей (убывающей) на этом множестве, если для любых $x_1, x_2 \in X$, таких, что $x_2 > x_1$ следует, что

$$f(x_2) > f(x_1) \quad \left(f(x_2) < f(x_1)\right).$$

Функция возрастающая или убывающая на множестве, называется монотонной функцией. Для нас важно, что отсюда следует, что из $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, а, следовательно, любая **монотонная функция имеет обратную**. Монотонность элементарных функций можно доказывать непосредственно или с помощью производных (это будет позже). Можно рассматривать ещё так называемые не строго монотонные функции – это функции, для которых для любых $x_1, x_2 \in X, x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$ – это неубывающая функция, или для любых $x_1, x_2 \in X, x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$ – невозрастающая функция. К ним относится функция $y = const$, которая является одновременно и неубывающей, и невозрастающей, и не имеет обратной.

Пример 11. Рассмотрим функцию $y = \frac{1}{x}$. Формула имеет смысл для $x \in (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$, что и будет $D(y)$. Исследуем разность $f(x_2) - f(x_1) = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{-(x_2 - x_1)}{x_1 x_2}$. Отсюда следует, что, если $x_2 > x_1$ и $x_1 x_2 > 0$, т. е. они одного знака, то разность отрицательна. Следовательно, функция убывает на $(-\infty;0)$ и убывает на $(0;+\infty)$, но не убывает на $D(y)$ (а потому не является монотонной на области определения), т.к. если $x_1 < 0, x_2 > 0 \Rightarrow x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0$ (что подтверждает правильность рис. 2б).

Функция $f(x)$ называется четной (нечетной) на X, если выполнены два условия:

1. Если $x \in X$, то $-x \in X$, т. е. область определения симметрична относительно 0.
2. Для любого $x \in X \Rightarrow f(x) = f(-x)$ $\left(f(x) = -f(-x) \right)$.

Если функция не является чётной или нечётной, то говорят, что она является функцией общего вида.

Пример 12. Определить, являются ли чётными, нечётными или функциями общего вида следующие функции:

а) $y = \sqrt{x}$, б) $y = \cos 4x$, в) $y = \frac{x^3 - 4\sin 2x}{ctgx}$,

г) $y = |x+1| - |x-1|$, д) $y = \frac{x-1}{x^2+4}$.

♦ а) $y = \sqrt{x}$ является функцией общего вида, т. к. её область определения $D(y) = [0;+\infty)$ не симметрична относительно 0.

б) $y = \cos 4x$ – чётная функция.

в) $y = \frac{x^3 - 4\sin 2x}{ctgx}$ – чётная функция, т. к.

1) область определения $D(y)$ этой функции, состоящая из объединения счётного множества интервалов вида $\left(\frac{\pi n}{2};\ \frac{\pi}{2}+\frac{\pi n}{2}\right)$, $n\in Z$, симметрична относительно 0;
2) для любого $x\in D(y)\Rightarrow y(x)=y(-x)$.
г) $y=|x+1|-|x-1|$ – нечётная, т. к.
$y(-x)=|-x+1|-|-x-1|=-(|x+1|-|x-1|)=-y(x)$.
д) $y=\dfrac{x-1}{x^2+4}$ – функция общего вида, т. к., например,

$$\begin{cases}0=y(1)\neq y(-1)=-\dfrac{2}{5},\\ y(1)\neq -y(-1).\end{cases}$$ ♦

График любой чётной функции симметричен относительно оси ординат, а график любой нечётной функции симметричен относительно начала координат. Поэтому для построения графиков таких функций достаточно построить их для положительных значений, а затем продолжить чётным или нечётным образом соответственно.

Посмотрим, как используется чётность функций при решении задач.

Пример 13. (МГУ, 1990, мехмат). Найти все значения параметра a, при которых уравнение $x^2-2a\sin(\cos x)+a^2=0$ имеет единственное решение.

♦ Заметим, что левая часть уравнения является чётной функцией на R. Поэтому, если уравнение имеет решение $x=x_0$, то $x=-x_0$ тоже является решением. Если $x_0\neq -x_0\Leftrightarrow x_0\neq 0$, то уравнение имеет, по крайней мере, два корня. Поэтому, если корень один, то это $x=0$. Посмотрим, при каких a уравнение имеет такой корень.
$x=0:-2a\sin 1+a^2=0\Leftrightarrow a=\left[\begin{array}{l}0,\\ 2\sin 1.\end{array}\right.$

Но при таких a уравнение может иметь, вообще говоря, и другие корни – такие a нам не подходят. Найдём все решения при полученных a.

$a = 0 : x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0;$

$a = 2\sin 1 : x^2 - 4\sin 1 \sin\cos x + 4\sin^2 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 = 4\sin 1(\sin\cos x - \sin 1) \le 0 \quad (\sin\cos x \le \sin 1) \Leftrightarrow x = 0.$

Итак, при этих a имеем единственное решение $x = 0$.

Ответ: $0; 2\sin 1$. ♦

