§5. Силы

Запись второго закона Ньютона в виде формулы (1) нельзя трактовать, как равенство двух сил $\vec{F}$ и $m\vec{a}$. Эта запись представляет собой лишь выражение равнодействующей силы через массу тела и вызванное этой силой ускорение. В динамике взаимодействия тел считаются заданными, поэтому конкретные выражения для сил, входящих в законы динамики, должны быть взяты из тех разделов физики, где изучается их природа.

В механике обычно имеют дело с силами тяготения, упругости и трения (сопротивления). Подробно эти силы изучаются в школьном курсе физики. Здесь лишь напомним основные выражения для этих сил и вкратце рассмотрим условия их применимости.

5.*1. Силы гравитационного притяжения. Сила тяжести.* В соответствии с *законом всемирного тяготения* сила гравитационного притяжения между двумя материальными точками в вакууме прямо пропорциональна произведению масс точек m_1 и m_2, обратно пропорциональна квадрату расстояния r между ними и направлена по прямой, соединяющей эти точки:

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}, \qquad (5)$$

где γ – гравитационная постоянная, $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \dfrac{\text{м}^3}{\text{кг} \cdot \text{с}^2}$.

Фигурирующие в этой формуле массы называют *гравитационными* в отличие от *инертной* массы, входящей во 2-й закон Ньютона. На опыте, однако, установлено, что гравитационная и инертная массы любого тела равны и можно говорить просто о массе тела, которая выступает и как мера инертности тела, и как мера гравитационного взаимодействия.

Закон тяготения в форме (5) сформулирован для материальных точек. Можно, однако, показать, что однородные тела, имеющие шарообразную форму, даже если их размеры не малы по сравнению с расстоянием между ними, также взаимодействуют с силой, определяемой формулой (5), где r в этом случае – расстояние между центрами шаров, а силы направлены вдоль прямой, соединяющей центры шаров.

● **ПРИМЕР 3.** Во сколько раз и как изменится сила гравитационного притяжения двух однородных шаров, если их заменить шарами из того же материала, увеличив в три раза радиус каждого? В обоих случаях шары соприкасаются друг с другом.

РЕШЕНИЕ. Пусть радиусы шаров равны R_1 и R_2, а плотности материалов шаров соответственно ρ_1 и ρ_2. Тогда для масс шаров имеем:

$$m_1 = \rho_1 \cdot V_1 = \rho_1 \cdot \frac{4}{3}\pi R_1^3, \;\; m_2 = \rho_2 \cdot V_2 = \rho_2 \cdot \frac{4}{3}\pi R_2^3.$$

Поскольку шары соприкасаются друг с другом, то расстояние между их центрами равно $R_1 + R_2$, и, следовательно, сила F_1 гравитационного притяжения между шарами в соответствии с формулой (5) равна

$$F_1 = \gamma \frac{\left(\frac{4}{3}\pi\right)^2 \rho_1 \rho_2 R_1^3 R_2^3}{\left(R_1 + R_2\right)^2}.$$

При увеличении радиусов шаров в три раза расстояние между их центрами также увеличивается в три раза, а масса каждого шара возрастает в $3^3 = 27$ раз. Сила гравитационного притяжения между шарами будет:

$$F_2 = \gamma \frac{\left(\frac{4}{3}\pi\right)^2 \rho_1 \rho_2 (3R_1)^3 \cdot (3R_2)^3}{\left(3R_1 + 3R_2\right)^2} = 81\gamma \frac{\left(\frac{4}{3}\pi\right)^2 \rho_1 \rho_2 R_1{}^3 \cdot R_2{}^3}{\left(R_1 + R_2\right)^2}.$$

Видим, что $F_2 = 81F_1$. Следовательно, сила гравитационного притяжения между шарами увеличится в 81 раз. ●

Любое тело на Земле испытывает действие силы гравитационного притяжения к ней. Эта сила называется *силой тяжести* и равна,

$$\vec{F} = m\vec{g}, \tag{6}$$

где m – масса тела, $\vec{g}$ – ускорение свободного падения (ускорение, которое земной шар сообщает любым телам независимо от их массы).

Сила тяжести направлена к центру Земли *(по вертикали)*. Заметим, что по третьему закону Ньютона равная по модулю сила приложена к Земле и направлена к телу. (Заметим, также, что мы не учитываем вращение Земли).

Модуль вектора $\vec{g}$ можно определить с помощью формулы (5). Ввиду большого значения радиуса Земли $R_З \approx 6370$ км, расстоянием между телом и поверхностью Земли можно пренебречь и считать, что расстояние между телом и Землей равно $R_З$. Тогда в соответствии с (5) и (6) модуль силы тяжести равен $mg = \gamma \frac{mM_З}{R_З^2}$, где m – масса тела, $M_З$ – масса Земли. Откуда видим, что $g = \gamma \frac{M_З}{R_З^2}$.

Следует заметить, что сила тяжести является постоянной по модулю только на определенной широте у поверхности Земли. Поскольку Земля имеет не идеально шарообразную форму, то на разных широтах радиус Земли имеет несколько различные значения и, следовательно, ускорение свободного падения (а значит и сила тяжести) на разных широтах также различно по модулю. В большинстве задач, однако, такими отличиями пренебрегают и считают, что для Земли $g \approx 9{,}8$ м/с^2.

Аналогичные рассуждения и соотношения справедливы, также, и для других планет и космических тел шарообразной формы.

● **ПРИМЕР 4.** Чему равно ускорение свободного падения на поверхности планеты, масса которой в 3 раза больше массы Земли, а радиус в 2 раза больше радиуса Земли?

РЕШЕНИЕ. Воспользуемся уже известным соотношением: $g_1 = \gamma \dfrac{M}{R^2}$.

Здесь g_1 – ускорение свободного падения на планете, M – масса планеты, а R – радиус планеты. По условию $M = 3M_З$, а $R = 2R_З$. Следовательно:

$$g_1 = \gamma \frac{3M_З}{4R_З{}^2} = \frac{3}{4}g.$$

где g – ускорение свободного падения на поверхности Земли. Таким образом $g_1 \approx 7{,}4\,\text{м/с}^2$. ●

5.2. ***Сила упругости.*** *Силами упругости обычно называют силы, возникающие при деформации тела и зависящие от величины этой деформации.* Под деформацией понимают изменение формы или объема тела.

Деформация тела возникает в том случае, когда его различные части испытывают различные перемещения. Например, при растяжении или сжатии пружины больше всего смещаются края пружины, а ее середина практически остается на месте (при таком рассмотрении, заметим, пружина не является материальной точкой).

Направление сил упругости противоположно направлению относительного смещения частиц тела при деформации (тело как бы сопротивляется стремлению его деформировать). Примерами таких сил являются силы упругой деформации при растяжении (или сжатии) пружины, резинового шнура, нити, металлического стержня и т.п.

При малых деформациях тел связь силы упругости с величиной деформации была экспериментально установлена английским физиком Р. Гуком, современником Ньютона. Для приведенных выше примеров в соответствии с законом Гука *модуль силы упругости* F_y *прямо пропорционален изменению* x *длины тела (пружины, шнура, нити, стержня):*

$$F_y = kx. \qquad (7)$$

Здесь k – положительный коэффициент пропорциональности, называемый *коэффициентом упругости.* Он зависит от «упругих» свойств конкретного деформируемого тела. Величина x равна модулю разности длины тела в недеформированном состоянии и его длины в состоянии деформации. Направление силы F_y противоположно направлению деформации. Приложена сила упругости к телу, вызывающему деформацию данного тела. Например, если груз висит на пружине, то сила упругости пружины приложена к грузу.

Силу упругости, действующую на тело со стороны пружины, нити, опоры и т.п., часто называют силой реакции связи, а именно: силой упругости пружины, силой натяжения нити, силой реакции опоры и т.п.

● **ЗАМЕЧАНИЕ**. Хотя силы упругости появляются только при деформациях, не всегда деформация приводит к появлению сил упругости. Силы упругости возникают в телах, способных восстанавливать свою форму (или объем) после прекращения действия сил, вызвавших деформацию. Но наряду с такими телами имеются и так называемые пластичные тела, которые после деформации своей формы не восстанавливают (например, мокрая глина, свинцовый шарик и т.п.). При деформациях этих тел также возникает сила, но это не сила упругости, так как ее значение зависит не от величины деформации, а от скорости, с которой эта деформация производится. Эти силы мы рассматривать не будем. ●

Одной из причин, вызывающих деформацию тел, является действие силы тяжести. Именно за счет этой силы возникают деформации, приводящие к появлению *веса тела* и *силы реакции опоры.*

5.3. Вес тела. *Весом тела называют силу, с которой тело вследствие его притяжения к Земле действует на опору (или подвес), неподвижную относительно данного тела.* Если сила тяжести является результатом взаимодействия тела с Землей, то вес тела появляется в результате совсем другого взаимодействия – взаимодействия тела и опоры (или подвеса). Поэтому вес обладает особенностями, существенно отличающими его от силы тяжести. В частности, эти силы приложены к разным телам, и, кроме того, вес существенно зависит от ускорения, с которым движутся совместно опора (подвес) и тело.

● **ПРИМЕР 5**. Определить вес чемодана массой m, стоящего на полу лифта, в трех случаях, когда относительно поверхности земли лифт 1) покоится, 2) движется с ускорением $\vec{a}$, направленным вертикально вверх, 3) движется с ускорением $\vec{a}$, направленным вертикально вниз.

РЕШЕНИЕ. Во всех трех случаях опорой для чемодана служит пол лифта. На чемодан действуют сила тяжести $m\vec{g}$, направленная вертикально вниз, и сила реакции опоры $\vec{N}$, направленная вертикально вверх. На пол лифта со стороны чемодана действует вес $\vec{P}$ чемодана, направленный вертикально вниз. Вес приложен к опоре (к полу). По третьему закону Ньютона вес чемодана и сила реакции опоры равны по модулю $P = N$.

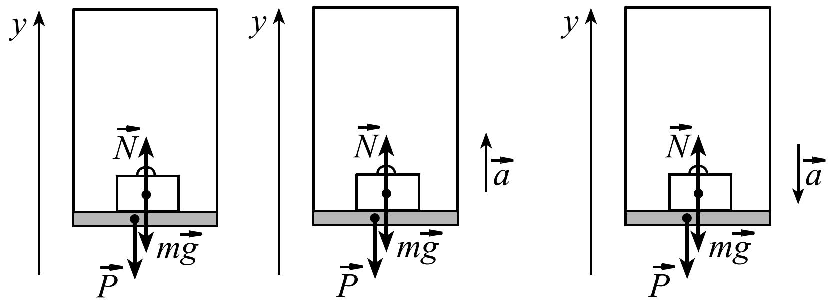

Рис. 3а **Рис. 3б** **Рис. 3в**

Уравнение (1) для чемодана в нашем примере имеет вид:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}. \qquad (*)$$

Поскольку все силы направлены вертикально и движение происходит в вертикальном направлении, то при выборе системы координат нам будет достаточно одной вертикальной оси y.

1) В первом случае (рис. 3а) лифт и чемодан неподвижны относительно земли, следовательно ускорение чемодана равно нулю (как и его скорость), и уравнение (*) в проекциях на ось y дает: $0 = N - mg.$

Откуда находим $N = mg$ и, следовательно, $P = mg.$ Таким образом, *вес чемодана равен по модулю действующей на чемодан силе тяжести.*

2) Во втором случае уравнение (*) в проекциях на ось y принимает вид $ma = N - mg.$ Откуда для силы реакции опоры получаем

$$N = mg + ma = m(g + a).$$

Как видим, сила взаимодействия чемодана с лифтом изменилась. Откуда чемодан «узнал», что ему нужно подниматься вместе с лифтом с ускорением $\vec{a}$? Только через взаимодействие с полом лифта (с опорой). Таким образом, в этом случае модуль веса чемодана равен $P = m(g + a).$

3) В третьем случае уравнение (*) в проекциях на ось y запишется в виде: $-ma = N - mg.$ Отсюда определяем $N = mg - ma = m(g - a).$ Следовательно, в этом случае вес чемодана численно равен $P = m(g - a).$

Интересно заметить, что, если в этом случае ускорение $\vec{a}$ лифта (и чемодана) будет равно $\vec{g},$ то вес чемодана и сила реакции опоры обратятся в нуль. Иными словами, наступит так называемое *состояние невесомости.* Но, несмотря на равенство нулю веса чемодана, сила тяжести будет действовать на него по-прежнему.

Самостоятельно проанализируйте ситуацию, когда в последнем случае $a > g.$ ●

5.4. Силы трения. Во многих задачах приходится рассматривать трение тел друг о друга. Пусть *тело 1* движется (скользит) с некоторой скоростью $\vec{v}$ относительно *тела 2* (рис.4). При наличии трения силу $\vec{R},$ с которой одно тело действует на другое, удобно рассматривать, как векторную сумму двух сил (рис. 4): силы $\vec{N},$ направленной перпендикулярно к поверхности контакта (это *сила нормальной реакции опоры,* с которой мы уже встречались в примере 5, где она действовала на чемодан со стороны пола лифта), и *силы трения* $\vec{F}_{тр}$ *скольжения,* направленной по касательной к поверхности контакта. (Заметим, что такие же по модулю, но противоположные по направлению, силы действуют на *тело 2* со стороны *тела 1.*) Удобство заключается в том, что при скольжении тел относительно друг друга модули этих составляющих связаны между собой *законом Кулона-Амонтона,* установленным экспериментальным путем:

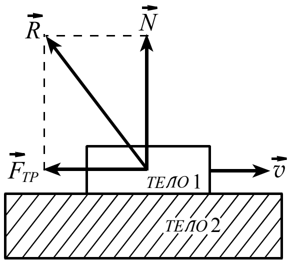

Рис. 4

$$F_{тр} = \mu N. \tag{8}$$

Положительный *коэффициент трения* μ зависит от рода соприкасающихся поверхностей. Обычно пренебрегают слабой зависимостью силы трения от площади контакта и от величины относительной скорости тел.

Сила трения вызывается зацеплением неровностей поверхностей тел, упругими деформациями этих неровностей и сцеплением их в тех местах, где расстояние между частицами столь мало, что возможно межмолекулярное притяжение.

На практике часто можно наблюдать случаи, когда при наличии внешнего воздействия на одно из соприкасающихся тел, относительное движение этих тел (т.е. *скольжение*) отсутствует. Пусть, например, на *тело 1* действует некоторая внешняя сила, но проскальзывание тел отсутствует. Это означает, что на *тело 1* действует со стороны *тела 2* другая сила, направленная противоположно составляющей внешней силы вдоль касательной к поверхности соприкосновения тел и в точности равная этой составляющей по модулю. Эту силу обычно называют *силой трения покоя.* Она, как и сила трения скольжения, стремится препятствовать относительному перемещению тел, но обладает некоторыми особенностями.

Для силы трения покоя закон (8) неприменим, так как при постоянной силе N нормальной реакции опоры, модуль силы трения покоя может изменяться от нуля до некоторого максимального значения, обычно несколько превышающего силу трения скольжения для этих поверхностей (так называемое *явление застоя*). Но для простоты максимальное значение силы трения покоя также принимают равным μN (пренебрегая явлением застоя).

Иными словами, до тех пор, пока модуль составляющей внешней силы вдоль касательной к поверхности контакта тел не превышает максимального значения силы трения покоя, последняя равна по модулю указанной составляющей внешней силы и противоположно ей направлена, а соприкасающиеся тела находятся в покое относительно друг друга. Если же касательная составляющая вешней силы, действующей на *тело 1,* превысит по модулю величину μN , то *тело 1* начнет скользить (относительно соприкасающегося с ним *тела* 2), и на него будет действовать сила трения скольжения (8) со стороны соприкасающегося тела.

● **ПРИМЕР 6.** На наклонную плоскость с углом наклона $\alpha = 30^\circ$ положили кирпич массой $m = 2$кг. Коэффициент трения скольжения кирпича по наклонной плоскости равен $\mu = 0{,}8$. Чему равна сила трения, действующая на кирпич?

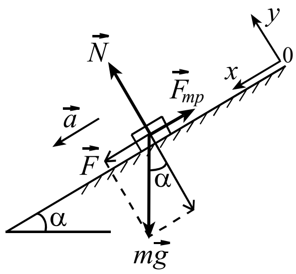

Рис. 5

РЕШЕНИЕ. Изобразим на рисунке все силы, действующие на кирпич (рис. 5). В данном случае указанные силы лежат в одной плоскости и, следовательно, при выборе системы отсчета можно ограничиться двумя координатными осями. Исходя из соображений удобства, выберем инерциальную систему отсчета, связанную с наклонной плоскостью, как показано на рис. 5.

В данном случае в роли *тела 1* выступает кирпич, а в роли *тела 2* – наклонная плоскость. Чтобы определить силу трения, необходимо прежде всего выяснить, движется ли кирпич по наклонной плоскости. Если – движется, то справедлива формула (8) для силы трения скольжения. Если – не движется, то на кирпич действует сила трения покоя. Проведем анализ задачи.

Предположим, что кирпич движется вдоль наклонной плоскости с ускорением $\vec{a}$ (рис. 5). Запишем уравнение (1), выражающее 2-й закон Ньютона, в проекциях на оси координат, учитывая, что $a_x = a, a_y = 0$:

$$Ox: \quad ma = mg\sin\alpha - F_{тр},$$
$$Oy: \quad O = N - mg\cos\alpha. \qquad (9)$$

Сила трения скольжения согласно (8) равна $F_{тр} = \mu N.$ Из (9) определяем модуль силы нормальной реакции опоры: $N = mg\cos\alpha$. Тогда $F_{òð} = \mu mg\cos\alpha = 0{,}8 \cdot 2 \cdot 9{,}8 \cdot \sqrt{3}/2 \approx 13{,}6\text{Н}.$ С другой стороны, сила, которая вызывает движение кирпича по наклонной плоскости – это составляющая $\vec{F}$ силы тяжести (внешней силы) вдоль оси Ox (вдоль поверхности соприкосновения тела и наклонной плоскости). Модуль этой составляющей равен: $F = mg\sin\alpha = 9{,}8\text{Н}.$

Видим, что $F < F_{тр}$. Это означает, что наше предположение о движении кирпича было неверным. Кирпич покоится относительно наклонной плоскости, и на него действует *сила трения покоя,* равная по модулю величине F, то есть $F_{тр} = F = mg\sin\alpha = 9{,}8\text{Н}.$ Направление силы трения покоя противоположно направлению $\vec{F}$. Приложена найденная сила трения к кирпичу. Заметим, что по третьему закону Ньютона, такая же по модулю, но противоположная по направлению, сила трения покоя действует на наклонную плоскость, и приложена она к наклонной плоскости (на рис. 5 не показана). ●

Если тело может катиться по той или иной поверхности, то из-за деформации материала этой поверхности перед катящимся телом возникает *сила трения качения,* которая обратно пропорциональна радиусу катящегося тела. Обычно сила трения качения гораздо меньше силы трения скольжения и ей, поэтому, пренебрегают.

При поступательном движении твердого тела в жидкости или газе возникает *сила сопротивления,* зависящая от скорости движения тела относительно среды (жидкости или газа). Эта сила может быть прямо пропорциональна как самой указанной скорости (при малых скоростях движения), так и квадрату скорости (при больших скоростях движения). Однако в любом случае направление силы сопротивления противоположно направлению вектора относительной скорости движения тела.

● **ЗАМЕЧАНИЕ**. Роль сил трения, однако, не сводится лишь к тому, чтобы тормозить относительное движение тел. В ряде практически очень важных случаев движение не могло бы возникнуть без действия сил трения. Например, движение автомобилей, ходьба или бег человека по земле и т.п. являются прямым следствием действия силы трения. Препятствуя проскальзыванию (относительному движению), сила трения совершает «полезное дело», ускоряя машину, наше собственное тело и т.п. ●

