Федеральное агентство по образованию
Федеральная заочная физико-техническая школа
при Московском физико – техническом институте
(государственном университете)

МАТЕМАТИКА

Тригонометрические уравнения, системы и неравенства

Задание №3 для 11-х классов

(2006-2007 учебный год)

г. Долгопрудный, 2006

Составитель: Н.Х. Агаханов, доцент кафедры высшей математики МФТИ.

математика: задание №3 для 11-х классов (2006-2007 учебный год). - М.: МФТИ, 2006, 32с.

Дата отправления заданий по физике и математике – 30 ноября 2006г.

Составитель:
Агаханов Назар Хангельдыевич

Изд. лиц. №040060 от 21.08.96г. Подписано 17.10.06
Формат 60х90 1/16. Бумага типографская. Печать офсетная. Усл. печ. л. 2,0
Уч.-изд. л. 1,77. Тираж 2200. Заказ №6-з.

Федеральная заочная физико-техническая школа
Московский физико-технический институт
(государственный университет)
«ФИЗТЕХ-ПОЛИГРАФ»

141700, Москов. обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
ФЗФТШ при МФТИ, тел/факс (495) 408-5145 – **заочное отделение**
тел./факс (495) 409-9351 – **очно-заочное отделение**
тел. 409-9583 – **очное отделение**

E.mail: zftsh@pop3.mipt.ru

Наш сайт: www.school.mipt.ru

§1. Решение тригонометрических уравнений

Тема «Тригонометрия» достаточно широко представлена в школьном курсе математики, поэтому вы знакомы со схемой решения многих тригонометрических уравнений: они сводятся преобразованиями, использующими тригонометрические тождества, и (или) заменой переменных к нескольким простейшим уравнениям.

К простейшим мы относим уравнения $\sin x = a$, $|a| \le 1$; $\cos x = a$, $|a| \le 1$; $tg x = a$, $a \in R$, решения которых, соответственно, задаются формулами

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n \qquad (1)$$

$$x = \pm \arccos a + 2\pi n \qquad (2)$$

$$x = arctg\, a + \pi n \qquad (3)$$

(Здесь и далее мы будем опускать записи n (m, k, l) $\in Z$, так как эти буквы будут использоваться только при выписывании решений простейших тригонометрических уравнений.)

Следует напомнить, что с точки зрения школьной (элементарной) математики уравнения $\sin x = a$ и $\cos x = a$ имеют решения только при $|a| \le 1$. К сожалению, очень часто абитуриенты допускают ошибки на заключительном этапе выполнения заданий по тригонометрии после сведения их к уравнениям вида $\sin x = a$, $\cos x = a$. **Не может быть зачтено** решение задачи, если, например, получив простейшее уравнение $\sin x = \frac{1}{3}$, школьник (абитуриент) пишет $x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{3} + \pi m$ (убедитесь самостоятельно в том, что приведенная формула дает также все решения уравнения $\sin x = -\frac{1}{3}$), либо если в ответе присутствует запись вида $x = (-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{5}}{2} + \pi n$ (равенство $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{2}$ невозможно, т. к. $\frac{\sqrt{5}}{2} > 1$).

Заметим еще, что хотя формулы (1), (2) верны при всех значениях a, удовлетворяющих условию $|a| \le 1$, в случае $a = 0, \pm 1$ ими лучше не пользоваться. Так для уравнения $\sin x = 1$ формула (1) дает ответ $x = (-1)^n \frac{\pi}{2} + \pi n$, в котором каждый корень указывается дважды: при $n = 2m$ $x = (-1)^{2m} \frac{\pi}{2} + 2\pi m = \frac{\pi}{2} + 2\pi m$ и при $n = 2m+1$ $x = (-1)^{2m+1} \frac{\pi}{2} + \pi(2m+1) = \frac{\pi}{2} + 2\pi m$. Лучше использовать формулы: $x = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, для записи решений уравнений $\sin x = \pm 1$.

$x = \pi n$ для $\sin x = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ для $\cos x = 0$,

$x = 2\pi n$ для $\cos x = 1$, $x = \pi + 2\pi n$ для $\cos x = -1$.

Пример 1. Решить уравнение $\sin 2x + \cos x \cos 2x + 3\cos x = 0$.

Решение. Воспользовавшись тождеством $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, преобразуем уравнение к виду: $\cos x(2\sin x + \cos 2x + 3) = 0$. Мы получили совокупность уравнений $\cos x = 0$ и $2\sin x + \cos 2x + 3 = 0$. Из первого уравнения находим $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$. Второе после замены $t = \sin x$ сводится к квадратному уравнению $2t + 1 - 2t^2 + 3 = 0$, откуда $t = -1$, $t = 2$. Уравнение $\sin x = 1$ дает корни $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m$, уравнение $\sin x = 2$ решений не имеет.

Отметим, что ответ $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m$, являющийся формально правильным, не является математически точным, т. к. серия корней $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m$ входит в серию $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ при $n = 2m - 1$ (если $\sin x = -1$, то $\cos x = 0$).

Ответ: $\frac{\pi}{2}+\pi n.$

Обобщением рассмотренного выше являются уравнения вида

$$a\sin x+b\cos 2x=c, \tag{4}$$

$$a\cos x+b\cos 2x=c, \tag{5}$$

сводящиеся к квадратным относительно t путем замен $t=\sin x$ и $t=\cos x$ в силу тождеств $\cos 2x=1-2\sin^2 x=2\cos^2 x-1$.

Важно заметить, что применение некоторых тригонометрических формул может привести к изменению множества допустимых значений аргумента. Так, использование равенств

$$tg\,2x=\frac{2tg\,x}{1-tg^2x},\ \sin 2x=\frac{2tg\,x}{1+tg^2x},\ \cos 2x=\frac{1-tg^2x}{1+tg^2x}$$

может привести к потере корней, т. к. значения $tg\,2x,\ \sin 2x,\ \cos 2x$ существуют при $x=\frac{\pi}{2}+\pi n,$ в то время как $tg\,x$ при указанных x не существует. Поэтому необходима проверка принадлежности указанных значений переменной множеству решений.

Пример 2. Решить уравнение $\sin x+3\cos x+3=0.$

Решение. Введем новую переменную $t=tg\frac{x}{2}.$ Тогда $\sin x=\frac{2t}{1+t^2},$ $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},$ откуда $t=-3.$ Следовательно, $tg\frac{x}{2}=-3,$ $x=2\big(arctg(-3)+\pi n\big)=-2arctg3+2\pi n.$ Далее, согласно сделанному замечанию, мы должны проверить значения x такие, что $\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi n,$ т. е. $x=\pi+2\pi n.$ Подстановка в уравнение показывает, что все указанные значения x являются корнями.

Ответ: $-2arctg3+2\pi n,\ \pi+2\pi n.$

Другой способ решения приведенного уравнения дает *метод введения дополнительного угла*, позволяющий преобразовать сумму

$S = a\sin x + b\cos x$ к одной тригонометрической функции. Имеем: $S = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right)$.

Так как $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$, то существуют углы α и β такие, что $\cos\alpha = \sin\beta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\alpha = \cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Поэтому $S = \sqrt{a^2+b^2}\left(\cos\alpha\sin x + \sin\alpha\cos x\right) = \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(x+\alpha)$, а также $S = \sqrt{a^2+b^2}\left(\sin\beta\sin x + \cos\beta\cos x\right) = \sqrt{a^2+b^2}\,\cos(x-\beta)$.

Пример 3. Методом введения дополнительного угла решить уравнение примера 2.

Решение. Имеем: $\sqrt{10}\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\sin x + \frac{3}{\sqrt{10}}\cos x\right) + 3 = 0$,

$\sin(x+\alpha) + \frac{3}{\sqrt{10}} = 0$, где $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$, т. е. можно положить $\alpha = \arccos\frac{1}{\sqrt{10}}$ (если в выражении S $a > 0$, $b < 0$, то

$\alpha = -\arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, если $a < 0$, $b > 0$, то

$\alpha = \pi - \arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$). Итак, $\sin(x+\alpha) = -\frac{3}{\sqrt{10}}$,

$$x = -\arccos\frac{1}{\sqrt{10}} + (-1)^{k+1}\arcsin\frac{3}{\sqrt{10}} + \pi k.$$

Полученные формулы показывают, насколько различными могут быть формы записи ответа (сравните с ответом в примере 2). Если в последней формуле взять $k = 2n+1$, то получим

$x = -\arccos\frac{1}{\sqrt{10}} + \arcsin\frac{3}{\sqrt{10}} + 2\pi n + \pi = \pi + 2\pi n$, если же $k = 2n$, то $x = -\arccos\frac{1}{\sqrt{10}} - \arcsin\frac{3}{\sqrt{10}} + 2\pi n = -2arctg3 + 2\pi n$ в силу равенств $\arccos\frac{1}{\sqrt{10}} = \arcsin\frac{3}{\sqrt{10}} = arctg3$.

Пример 4. Решить уравнение $\sin x + \cos x + \sqrt{2}\sin 5x = 0$.

Решение. Уравнение преобразуется к виду

$\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right) + \sqrt{2}\sin 5x = 0$, т. е. $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin 5x = 0$,

откуда, согласно формулам для суммы синусов,

$$2\sin\left(3x + \frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8} - 2x\right) = 0.$$

Итак,

$$\sin\left(3x + \frac{\pi}{8}\right) = 0,\ x = \frac{1}{3}\left(-\frac{\pi}{8} + \pi n\right),$$

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{8}\right) = 0,\ x = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} + \pi n\right).$$

Ответ: $-\frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{3},\ \frac{5\pi}{16} + \frac{\pi n}{2}$.

Пример 5. Найти наибольшее значение функции $f(x) = \cos x(\sin x - 7\cos x)$.

Решение. Конечно, можно продифференцировать эту функцию, найти точки, в которых $f'(x) = 0$, и затем, вычислив ее значения в этих точках, найти ответ. Решение будет проще, если заметить, что эта функция линейна по $\sin 2x$, $\cos 2x$: $f(x) = \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{7}{2}(1 + \cos 2x)$.

Отсюда, учитывая, что

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{7}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{50}}{2},$$

получаем

$$f(x)=\frac{\sqrt{50}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{50}}\sin 2x-\frac{7}{\sqrt{50}}\cos 2x\right)-\frac{7}{2}=\frac{\sqrt{50}}{2}\sin(2x-\alpha)-\frac{7}{2}.$$

Наибольшее значение $f(x)$ равно $\frac{\sqrt{50}}{2}-\frac{7}{2}=\frac{5\sqrt{2}-7}{2}$, и оно достигается, когда, например, $2x-\alpha=\frac{\pi}{2}$, т. е. $x=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{\sqrt{50}}$.

Ответ: $\frac{5\sqrt{2}-7}{2}$.

К уравнениям, решаемым по стандартной схеме, относятся также *однородные уравнения* относительно $\sin x$ и $\cos x$.

Мы рассмотрим однородные уравнения первого порядка:

$$a\sin x+c\cos x=0 \tag{6}$$

и второго порядка:

$$a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x=0. \tag{7}$$

Случаи $a=0$ или $c=0$ для (6) сразу дают $\cos x=0$ или $\sin x=0$. Если же $a\neq 0$, $c\neq 0$, то $\cos x\neq 0$ (иначе $\sin x=0$ и тогда $\sin^2 x+\cos^2 x=0$), и мы получаем $\operatorname{tg} x=-\frac{c}{a}$.

Уравнение (7) в случаях $a=0$ или $c=0$ сразу сводится к (6), если же $a\neq 0$, $c\neq 0$, то вновь $\cos x\neq 0$. Разделив обе части (7) на $\cos^2 x$, мы получаем квадратное уравнение относительно

$t=\operatorname{tg}x: at^2+bt+c=0.$

Пример 6. Решить уравнение $\sin x+3\cos x=1$.

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+3\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)=\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}.$$

Отсюда $4\sin^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-2\cos^2\frac{x}{2}=0$, т. е. $2t^2-t-1=0$, где $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Имеем $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=1$, $\frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$

или $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=-\frac{1}{2}$, $x=2\left(-arctg\frac{1}{2}+\pi n\right)$.

Ответ: $\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ -2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+2\pi n.$

Еще одним классом уравнений, включаемых нами в список стандартных, являются уравнения вида

$$a(\sin x\pm\cos x)+b\sin 2x=c. \tag{8}$$

Из основного тригонометрического тождества следует, что $(\sin x\pm\cos x)^2=1\pm 2\sin x\cos x=1\pm\sin 2x.$ Поэтому замена $t=\sin x\pm\cos x$ сводит уравнение (8) к квадратному.

Пример 7. Решить уравнение $\sin x-\cos x+\sin 2x+1=0.$

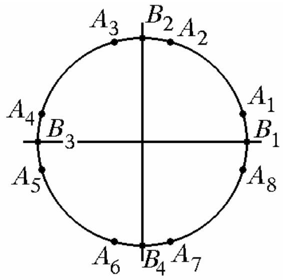
Решение. Положив $t=\sin x-\cos x,$ получаем $t^2=1-\sin 2x,$ т. е. $\sin 2x=1-t^2$, следовательно, $t+1-t^2+1=0,$ откуда $t=-1,$ $t=2.$ Значит, $\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-1{,}2.$ В первом случае $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x-\frac{\pi}{4}=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{4}+\pi n,$ $x=\frac{\pi}{4}+(-1)^{n+1}\frac{\pi}{4}+\pi n.$ Это решение удобнее записать в виде двух серий: $x=2\pi m,$ $x=\frac{3\pi}{2}+2\pi m,$ получаемых при $n=2m$ и при $n=2m+1.$ Во втором случае ($t=2$) имеем: $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$, что невозможно.

Ответ: $2\pi m,\ \frac{3\pi}{2}+2\pi m.$

Как и при решении алгебраических уравнений, нередко для упрощения вида тригонометрических уравнений необходимо применение преобразований, расширяющих множество допустимых значений переменной (возведение в квадрат, умножение обеих частей уравнения на некоторую функцию), приводящих, возможно, к приобретению посторонних корней. Схема действия при этом такая же, как и при решении обычных алгебраических уравнений.

Пример 8. Решить уравнение $\dfrac{\sin x}{\sin 3x}+\dfrac{\sin 5x}{\sin x}=8\cos x\cos 3x.$

Решение. Умножив обе части уравнения на $\sin x\sin 3x,$ мы, естественно, можем приобрести посторонние корни. Поэтому, решив полученное уравнение, мы должны отбросить корни, для которых $\sin x=0$ или $\sin 3x=0.$ Имеем: $\sin^2 x+\sin 3x\sin 5x=8\cos x\cos 3x\sin x\sin 3x.$ Отсюда, используя формулы понижения, синуса двойного угла и преобразования произведения синусов в сумму, получаем:



$\dfrac{1}{2}(1-\cos 2x)+\dfrac{1}{2}(\cos 2x-\cos 8x)=2\sin 2x\sin 6x,$

$\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos 8x=\cos 4x-\cos 8x,$ $1=2\cos 4x-\cos 8x$ –уравнение вида (5).

Положив $t=\cos 4x,$ получаем $1=2t-(2t^2-1),$ откуда $t=0,$ $t=1.$

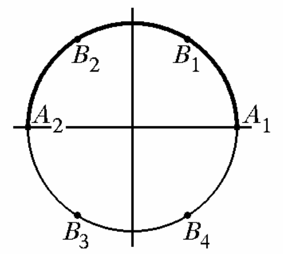
Итак, $\cos 4x=0,$ $x=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi n}{4}$ или $\cos 4x=1,$ $x=\dfrac{\pi n}{2}.$ Отбор посторонних корней наиболее просто производить на тригонометрическом круге. Отметим на нем точки A_1, A_2, ... A_8, соответствующие первой серии корней, и B_1, B_2, B_3, B_4 – второй серии и вычислим значения $\sin x,$ $\sin 3x$ в отмеченных точках. При этом рассматриваются только $x\in[0;2\pi),$ так как 2π является периодом как для $\sin x,$ так и для $\sin 3x.$ В итоге мы обнаружим, что посторонними являются корни, соответствующие точкам B_1 и B_3 тригонометрического круга.

Ответ: $\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi n}{4},$ $\dfrac{\pi}{2}+\pi n.$

Пример 9. Решить уравнение $\sqrt{1-\cos 4x} = \sin x.$

Решение.

I способ. Уравнение $\sqrt{A(x)} = B(x)$, как вы хорошо знаете из курса алгебры, равносильно системе $\begin{cases} A(x) = B^2(x), \\ B(x) \geq 0, \end{cases}$ поэтому из корней, которые мы получаем после возведения в квадрат, нужно выбрать те, для которых $\sin x \geq 0.$ Имеем: $1-\cos 4x = \sin^2 x,$ т. е. $1-\cos 4x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ – уравнение вида (5). Положив $t = \cos 2x,$ получаем $4t^2 - t - 3 = 0,$ откуда $\cos 2x = 1,$ $x = \pi n$ или $\cos 2x = -\frac{3}{4},$ $x = \frac{1}{2}\left(\pi \pm \arccos\frac{3}{4} + 2\pi n\right).$ Отметив полученные корни на тригонометрическом круге, увидим, что неравенству $\sin x \geq 0$ (выделенная дуга) удовлетворяют те решения, которые соответствуют точкам A_1, B_1, B_2, A_2.



II способ. В данном уравнении естественным является применение формулы $\sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}$. К сожалению, такая запись тождества $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$ нередко приводит к путанице и непониманию. Она порождает представления о какой-то «двузначности» синуса (косинуса) половинного аргумента. В действительности она означает, что если

$\sin\alpha \geq 0$, то $\sin\alpha = \sqrt{\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}}$, а если $\sin\alpha < 0$, то $\sin\alpha = -\sqrt{\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}}$. Другими словами, $|\sin\alpha| = \sqrt{\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}}$.

Таким образом, исходное уравнение равносильно такому: $\sqrt{2}|\sin 2x| = \sin x$.

Левая часть уравнения неотрицательна, поэтому $\sin x \geq 0$ и, значит, $\sin x$ можно вынести из-под знака модуля: $2\sqrt{2}\sin x|\cos x| = \sin x$, $\sin x\left(2\sqrt{2}|\cos x| - 1\right) = 0$, следовательно, $\sin x = 0$, $x = \pi n$ или $|\cos x| = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$, $\cos x = \pm\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$, $x = \pm\arccos\dfrac{1}{2\sqrt{2}} + \pi n$. С помощью тригонометрического круга устанавливаем, что неравенству $\sin x \geq 0$ удовлетворяют корни $x = \pi n$, $x = \arccos\dfrac{1}{2\sqrt{2}} + 2\pi m$,

$$x = \pi - \arccos\frac{1}{2\sqrt{2}} + 2\pi m.$$

Ответ: πn, $\dfrac{\pi}{2} \pm \dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{3}{4} + 2\pi m$ (иначе: $x = \arccos\dfrac{1}{2\sqrt{2}} + 2\pi m$,

$$x = \pi - \arccos\frac{1}{2\sqrt{2}} + 2\pi m \text{)}.$$

В конце параграфа напомним, что при решении уравнений выражение $\sin f(x) \pm \cos g(x)$ можно преобразовать в произведение, воспользовавшись формулами приведения и преобразованием суммы (разности) одноименных тригонометрических функций в произведение.

Пример 10. Решить уравнение $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\cos 2x\right) = \cos\left(\dfrac{4}{3}\pi\sin x\right)$.

Решение. Преобразуем уравнение:

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\cos 2x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{4}{3}\pi\sin x\right) = 0,$$

$$2\sin\left(\frac{\pi}{12}\cos 2x-\frac{\pi}{4}+\frac{2}{3}\pi\sin x\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}\cos 2x+\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}\pi\sin x\right)=0.$$

Отсюда

а) $\frac{\pi}{12}\cos 2x-\frac{\pi}{4}+\frac{2}{3}\pi\sin x=\pi n$ либо

б) $\frac{\pi}{12}\cos 2x+\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}\pi\sin x=\frac{\pi}{2}+\pi n.$

В случае а) $\cos 2x-3+8\sin x=12n$ и, положив $t=\sin x,$ получаем: $2t^2-8t+(12n+2)=0,$ откуда $\sin x=2\pm\sqrt{3-6n},$ т. е. $n\le 0.$ Сумма $2+\sqrt{3-6n}$ больше 1, поэтому $\sin x=2-\sqrt{3-6n},$ т. е. $n=0$ или $n=-1,$ так как при $n\le -2$ имеет место неравенство $2-\sqrt{3-6n}<-1.$ Итак, при $n=0$ $\sin x=2-\sqrt{3},$ $x=(-1)^m\arcsin\left(2-\sqrt{3}\right)+\pi m,$ при $n=-1$ $\sin x=-1,$ $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi m.$

В случае б) $\cos 2x-8\sin x=3+12n,$ аналогично п. а) $\sin x=-2+\sqrt{3-6n},$ $n=0,\ -1,$

$x=(-1)^m\arcsin\left(-2+\sqrt{3}\right)+\pi m,$ $x=\frac{\pi}{2}+2\pi m.$

Полученные ответы можно объединить в две серии.

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,$ $x=\pm\arcsin\left(2-\sqrt{3}\right)+\pi k.$

§2. Системы тригонометрических уравнений

Как и алгебраические, системы тригонометрических уравнений решаются либо методом подстановки (как правило, в тех случаях, когда уравнения системы различаются по своему виду), либо комбинированием уравнений системы для получения более простого соотношения между переменными. Проиллюстрируем оба метода решения примерами. Кроме того, приведем примеры тригонометрических уравнений, сводящихся к системам.

I тип.

Пример 11. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 17\cos 2x - 7 = 21\sin x\cos 2y, \\ \cos x = \sqrt{3\sin x}\cos y. \end{cases}$$

Решение. Заметим, что если $\sin x = 0,$ то из второго уравнения $\cos x = 0,$ что невозможно. Значит, $\sin x \neq 0.$ Выразив из второго уравнения $\cos y,$ подставим в первое:

$$\cos y = \frac{\cos x}{\sqrt{3\sin x}},\ 17\cos 2x - 7 = 21\sin x\left(2\frac{\cos^2 x}{3\sin x} - 1\right),$$

т. е. $17\cos 2x - 7 = 14\cos^2 x - 21\sin x.$

Сделаем подстановку $t = \sin x:\ 17\left(1 - 2t^2\right) - 7 = 14\left(1 - t^2\right) - 21t,$ откуда

$$t = \frac{1}{4},\ t = \frac{4}{5}.$$

Итак, исходная система равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases} \sin x = \dfrac{1}{4}, \\ \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos y \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \sin x = \dfrac{4}{5}, \\ \cos x = 2\sqrt{\dfrac{3}{5}}\cos y. \end{cases}$$

Для первой системы $\cos x = \pm\frac{\sqrt{15}}{4} \Rightarrow \cos y = \pm\frac{\sqrt{5}}{2},$ что невозможно. Для второй $\cos x = \pm\frac{3}{5},\ \cos y = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}},$ т. е.

$$x = \pm\arccos\frac{3}{5} + \pi n,\ y = \pm\arccos\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}} + \pi m.$$

Отметим, что

1) правильный выбор целочисленных параметров, нумерующих решения простейших тригонометрических уравнений в системах, требует внимательности и аккуратности. Так запись $x = \pm\arccos\frac{3}{5} + \pi n,$

$y = \pm\arccos\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}} + \pi n$ немедленно ведет к потере бесконечного числа решений, например, решений $x = \arccos\frac{3}{5}$, $y = \arccos\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}} + \pi n$, $n \neq 0$.

2) равенство $\cos x = \pm\frac{3}{5}$ дает $\sin x = \pm\frac{4}{5}$, поэтому при нахождении корней необходимо учитывать первое уравнение системы: $\sin x = \frac{4}{5}$. Значит, $x = (-1)^k \arcsin\frac{4}{5} + \pi k$.

3) полученные формулы, задающие значения y, нельзя сразу включать в ответ, т. к. согласно второму уравнению системы знаки $\cos x$ и $\cos y$ должны совпадать. Значит, при $x = \arcsin\frac{4}{5} + 2\pi k$ $\cos y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}$, а при $x = \pi - \arcsin\frac{4}{5} + 2\pi k$ $\cos y = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}$.

Ответ: $x = \arcsin\frac{4}{5} + 2\pi k,\ x = \pm\arccos\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}} + 2\pi m;$

$x = \pi - \arcsin\frac{4}{5} + 2\pi k,\ x = \pi + \arccos\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}} + 2\pi m.$

В некоторых случаях одно из уравнений системы дает не одно, а несколько различных соотношений для подстановки в другое уравнение системы.

Пример 12. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{2} - \cos 2y = \left(\sin y - \frac{1}{2}\right)(1 + 2\sin 2x), \\ \mathrm{tg}^2 x + \mathrm{ctg}^2 x = 6\mathrm{tg}^2 y. \end{cases}$$

Решение. Из равенства $\frac{1}{2}-\cos 2y=\frac{1}{2}-\left(1-2\sin^2 y\right)=$ $=\frac{1}{2}\left(4\sin^2 y-1\right)=\frac{1}{2}(2\sin y-1)(2\sin y+1)$ следует, что первое уравнение системы допускает разложение на множители: $(2\sin y-1)(\sin y-\sin 2x)=0.$ Поэтому система распадается на две:

$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases} 2\sin y-1=0, \\ tgx^2+ctg^2x=6tg^2y \end{cases} \quad \text{и} \quad (\mathrm{II})\quad \begin{cases} \sin y-\sin 2x=0, \\ tg^2x+ctg^2x=6tg^2y. \end{cases}$$

Для (I) имеем: $\sin y=\frac{1}{2}\Rightarrow tg^2y=\frac{\sin^2 y}{1-\sin^2 y}=\frac{1}{3}\Rightarrow tg^2x+ctg^2x=2.$

Положив $t=tg^2x,$ получаем $t+\frac{1}{t}=2,$ $t=1,$ $tgx=\pm 1.$

Для (II) имеем: $\sin y=\sin 2x\Rightarrow \mathrm{tg}^2 y=\frac{\sin^2 2x}{1-\sin^2 2x}.$

Кроме того, $\mathrm{tg}^2x+\mathrm{ctg}^2x=$

$$=\frac{\sin^4 x+\cos^4 x}{\sin^2 x\cos^2 x}=\frac{\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-2\sin^2 x\cos^2 x}{\frac{1}{4}4\sin^2 x\cos^2 x}=\frac{1-\frac{1}{2}\sin^2 2x}{\frac{1}{4}\sin^2 2x}.$$

Обозначив $t=\sin^2 2x,$ получаем $\frac{1-\frac{1}{2}t}{\frac{1}{4}t}=\frac{6t}{1-t},$ $t=-2,$ $t=\frac{1}{2},$ т. е.

$\sin^2 2x=\frac{1}{2},$ $\sin 2x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}},$ $2x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},$ $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}.$ Тогда $\sin y=\sin 2x=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}\right).$ Для удобства разобьем множество значений величины $2x$ на два: $2x=\frac{\pi}{2}\pm\frac{\pi}{4}+2\pi m,$ тогда

$\sin y = \sin 2x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ и $2x = -\dfrac{\pi}{2} \pm \dfrac{\pi}{4} + 2\pi m,$

тогда $\sin y = \sin 2x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}.$

Ответ: $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2},\ \ y = (-1)^k \dfrac{\pi}{6} + \pi k;$

$$x = \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{8} + \pi m,\ \ y = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k;$$

$$x = -\frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{8} + \pi m,\ \ y = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{4} + \pi k.$$

II тип.

Пример 13. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 6\sin x \cos y + 2\cos x \sin y = -3, \\ 5\sin x \cos y - 3\cos x \sin y = 1. \end{cases}$$

Решение. Полагая $\sin x \cos y = a, \cos x \sin y = b,$ получаем

$$\begin{cases} 6a + 2b = -3, \\ 5a - 3b = 1, \end{cases}$$

откуда $a = -\dfrac{1}{4}, b = -\dfrac{3}{4}.$ Таким образом, исходная система равносильна следующей, в которую переменные входят симметрично:

$$\begin{cases} \sin x \cos y = -\dfrac{1}{4}, \\ \cos x \sin y = -\dfrac{3}{4}, \end{cases}$$

Складывая уравнения и вычитая их, получаем равносильную систему:

$$\begin{cases} \sin(x+y) = -1, \\ \sin(x-y) = \dfrac{1}{2}, \end{cases} \text{ т. е. } \begin{cases} x + y = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ x - y = (-1)^k \dfrac{\pi}{6} + \pi k, \end{cases}$$

из которой и получается ответ.

Ответ: $x=-\dfrac{\pi}{4}+(-1)^k\dfrac{\pi}{12}+\pi n+\dfrac{\pi k}{2},$

$$y=-\frac{\pi}{4}+(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\pi n-\frac{\pi k}{2}.$$

Пример 14. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\mathrm{tg}x\sin y+2\mathrm{ctg}x\cos y=\sqrt{\dfrac{5}{2}}, & (*1)\\ 2\mathrm{ctg}x\sin y-\mathrm{tg}x\cos y=\sqrt{\dfrac{5}{2}}. & (*2)\end{cases}$$

Решение. Рассмотрим данную систему как линейную относительно $\sin y$ и $\cos y$ и найдем эти выражения. Для этого вычислим сумму $(*1)\cdot\mathrm{tg}x+(*2)\cdot 2\mathrm{ctg}x$ и разность $(*1)\cdot 2\mathrm{ctg}x-(*2)\cdot\mathrm{tg}x$. Получим

$$\begin{cases}\left(\mathrm{tg}^2x+4\mathrm{ctg}^2x\right)\sin y=\sqrt{\dfrac{5}{2}}(\mathrm{tg}x+2\mathrm{ctg}x),\\ \left(4\mathrm{ctg}^2x+\mathrm{tg}^2x\right)\cos y=\sqrt{\dfrac{5}{2}}(2\mathrm{ctg}x-\mathrm{tg}x).\end{cases}\qquad(**)$$

Рассмотрим сумму квадратов полученных уравнений. Из основного тригонометрического тождества следует, что одна из переменных исключается:

$$\left(\mathrm{tg}^2x+4\mathrm{ctg}^2x\right)^2=\frac{5}{2}\left[\left(\mathrm{tg}x+2\mathrm{ctg}x\right)^2+\left(2\mathrm{ctg}x-\mathrm{tg}x\right)^2\right],$$

т. е.

$$\left(\mathrm{tg}^2x+4\mathrm{ctg}^2x\right)^2=5\left(\mathrm{tg}^2x+4\mathrm{ctg}^2x\right).$$

Отсюда

$$\mathrm{tg}^2x+4\mathrm{ctg}^2x=5,\text{ так как }\mathrm{tg}^2x+4\mathrm{ctg}^2x>0.$$

Обозначив $t=\mathrm{tg}^2x,$ получаем $t+\dfrac{4}{t}=5,\ t=1,\ t=4.$

а) $\mathrm{tg}^2x=1,\ \mathrm{tg}x=\pm1\Rightarrow\mathrm{ctg}x=\pm1,$ и система (**), равносильная исходной, принимает вид

$$\begin{cases} 5\sin y = \pm 3\sqrt{\dfrac{5}{2}}, \\ 5\cos y = \pm\sqrt{\dfrac{5}{2}}, \end{cases}$$

$\sin y = \pm\dfrac{3}{\sqrt{10}}$, $\cos y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{10}}$, т. е. при $tgx = 1$ y лежит в I четверти, при $\mathrm{tg}x = -1$ – y в III четверти. Таким образом, первая серия решений выглядит так: $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $y = \arcsin\dfrac{3}{\sqrt{10}} + 2\pi m$; $x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $y = \pi + \arcsin\dfrac{3}{\sqrt{10}} + 2\pi m$, т. е. $x = \pm\dfrac{\pi}{4} + \pi n$,

$y = \dfrac{\pi}{2} \mp \dfrac{\pi}{2} + \arcsin\dfrac{3}{\sqrt{10}} + 2\pi m.$

б) $\mathrm{tg}^2 x = 4$, $\mathrm{tg}x = \pm 2$, $\mathrm{ctg}x = \pm\dfrac{1}{2}$, система (**) принимает вид:

$$\begin{cases} 5\sin y = \pm 3\sqrt{\dfrac{5}{2}}, \\ 5\cos y = \mp\sqrt{\dfrac{5}{2}}, \end{cases} \quad \sin y = \pm\frac{3}{\sqrt{10}},\ \cos y = \mp\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

$$y = \frac{3\pi}{2} - \arcsin\frac{3}{\sqrt{10}} \mp \frac{\pi}{2} + 2\pi m.$$

Ответ: $x = \pm\dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $y = \dfrac{\pi}{2} \mp \dfrac{\pi}{2} + \arcsin\dfrac{3}{\sqrt{10}} + 2\pi m$;

$$x = \pm\mathrm{arctg}2 + \pi \mathrm{n},\quad y = \frac{3\pi}{2} \mp \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{3}{\sqrt{10}} + 2\pi m.$$

Пример 15. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3\cos 3x = \sin(x + 2y), \\ 3\sin(2x + y) = -\cos 3y. \end{cases}$$

Решение. Заметим вначале, что система $\begin{cases} A = B, \\ C = D \end{cases}$ не является равносильной системе $\begin{cases} A = B, \\ AD = BC, \end{cases}$ а именно, вторая из них имеет решения $A = B = 0,\ C \neq D,$ не удовлетворяющие первой системе.

Для получения дополнительного соотношения между переменными, перемножим уравнения:

$$-\cos 3x \cos 3y = \sin(x + 2y)\sin(2x + y) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -\cos(3x + 3y) - \cos(3x - 3y) = \cos(y - x) - \cos(3x + 3y) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \cos(y - x) + \cos(3(y - x)) = 0 \Leftrightarrow \cos(2(y - x))\cos(y - x) = 0$$

а) $\cos(2(y - x)) = 0,\ y - x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}.$ Для упрощения дальнейших вычислений рассмотрим 4 случая: 1) $n = 4m, y = x + \frac{\pi}{4} + 2\pi m,$

2) $n = 4m + 1,\ y = x + \frac{3\pi}{4} + 2\pi m,$ 3) $n = 4m + 2,\ y = x + \frac{5\pi}{4} + 2\pi m,$

4) $n = 4m + 3,\ y = x + \frac{7\pi}{4} + 2\pi m.$ Имеем:

1) $$\begin{cases} 3\cos 3x = \sin\left(3x + \frac{\pi}{2} + 4\pi m\right), \\ 3\sin\left(3x + \frac{\pi}{4} + 2\pi m\right) = -\cos\left(3x + \frac{3\pi}{4} + 6\pi m\right), \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\cos 3x = \cos 3x, \\ 3\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(3x + \frac{3\pi}{4}\right). \end{cases}$$

Отсюда

$$\cos 3x = 0,\ 3x = \frac{\pi}{2} + \pi k \Rightarrow 3\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \pm\frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow -\cos\left(3x+\dfrac{3\pi}{4}\right)=\pm\dfrac{3}{\sqrt{2}}$. Итак, мы получили посторонние решения (см. замечание в начале решения).

В случаях 2-4 аналогично доказывается отсутствие решений системы.

б) $\cos(y-x)=0,\ \ y=x+\dfrac{\pi}{2}+\pi n.$ Имеем:

$$\begin{cases}3\cos 3x=\sin(3x+\pi+2\pi n),\\ 3\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{2}+\pi n\right)=-\cos\left(3x+\dfrac{3\pi}{2}+3\pi n\right),\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3\cos 3x=-\sin 3x,\\ 3\cdot(-1)^n\cos 3x=(-1)^{n+1}\sin 3x,\end{cases}$$

откуда $\operatorname{tg}3x=-3$.

Ответ: $x=-\dfrac{1}{3}\operatorname{arctg}3+\dfrac{\pi m}{3},\ \ y=-\dfrac{1}{3}\operatorname{arctg}3+\dfrac{\pi m}{3}+\dfrac{\pi}{2}+\pi n.$

В ряде случаев решение основывается на оценке левой и правой частей уравнения. При этом уравнение $A=B$ в случае $A\ge a, B\le a$ равносильно системе $\begin{cases}A=a,\\ B=a.\end{cases}$

Пример 16. Решить уравнение $3\sin 5x=\cos 2x-\cos 8x-\sin 15x.$

Решение. Преобразуем уравнение:

$$3\sin 5x=2\sin 5x\sin 3x-\sin 15x\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\sin 5x+(\sin 5x+\sin 15x)=2\sin 5x\sin 3x\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\sin 5x+2\sin 10x\cos 5x=2\sin 5x\sin 3x\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sin 5x\left(1+2\cos^2 5x-\sin 3x\right)=0.$$

а) $\sin 5x=0,\ \ x=\dfrac{\pi n}{5}.$

б) $1+2\cos^2 5x-\sin 3x=0\Rightarrow \sin 3x=1+2\cos^2 5x.$

Левая часть не превосходит 1, правая часть не меньше 1, поэтому полученное уравнение дает систему

$$\begin{cases} \sin 3x = 1, \\ \cos 5x = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\pi n}{3}, \\ x = \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{\pi m}{5}. \end{cases}$$

Отметим, что грубой ошибкой была бы нумерация решений этих уравнений одной буквой. Итак,

$$\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3} = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi m}{5} \Rightarrow 5 + 20n = 3 + 6m,\ 1 + 10n = 3m.$$

Для нахождения пар целых чисел, для которых возможно последнее равенство, перепишем его в виде

$$m = \frac{10n + 1}{3} = 3n + \frac{n + 1}{3}.$$

Отсюда

$$n + 1 = 3k,\ n = 3k - 1$$

и тогда

$$m = 10k - 3,\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi(3k - 1)}{3} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k.$$

Ответ: $x = \dfrac{\pi n}{5}$, $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$ (среди полученных решений нет повторяющихся, т. к. равенство $\dfrac{\pi n}{5} = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$ дает $2(10k - n) = 5$, что невозможно).

§3. Тригонометрические неравенства

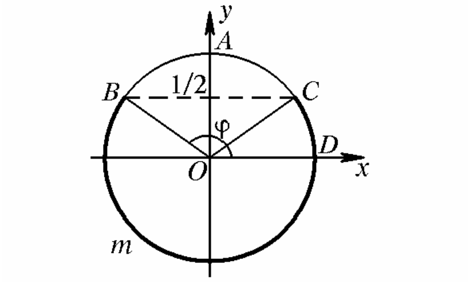
Решения простейших тригонометрических неравенств $\sin x > a(< a)$, $\cos x > a(< a)$, $\mathrm{tg} x > a(< a)$, к которым сводятся более сложные неравенства, наиболее просто находятся с помощью тригонометрического круга и оси тангенсов.

Пример 17. Решить неравенство $3\sin x + \cos 2x \le 2$.

Решение. Положив $t = \sin x$, получаем $3t + 1 - 2t^2 \le 2 \Rightarrow$ $\Rightarrow 2t^2 - 3t + 1 \ge 0$, откуда $t \ge 1$ и $t \le \dfrac{1}{2}$.

Первому неравенству удовлетворяет только одна точка $A\left(x=\frac{\pi}{2}+2\pi m\right)$ на тригонометрическом круге, второму – дуга BmC.

Учитывая то, что $\angle DOB=\frac{5\pi}{6},$ получаем, что BmC – это промежуток $\left[\frac{5\pi}{6}+2\pi n;2\pi+\frac{\pi}{6}+2\pi n\right].$



Ответ: объединение всех отрезков $\left[\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\frac{13\pi}{6}+2\pi n\right]$ и точек $\frac{\pi}{2}+2\pi n.$

Замечание. Ошибочным было бы включение в ответ промежутка $\left[\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\frac{\pi}{6}+2\pi n\right]$ (такой отрезок не существует) либо отрезка $\left[\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\frac{13\pi}{6}+2\pi m\right].$ Такой отрезок не существует при $m<n,$ а при $m>n$ получаем точки на всем тригонометрическом круге.

Пример 18. Решить неравенство $\sin x+2\cos x\geq 0.$

Решение. Введя дополнительный угол, получаем

$\sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\sin x+\frac{2}{\sqrt{5}}\cos x\right)\geq 0,$ т. е. $\cos(x-\varphi)\geq 0,$ $\varphi=\arccos\frac{2}{\sqrt{5}}.$

Отсюда $-\frac{\pi}{2}+2\pi n\leq x-\varphi\leq\frac{\pi}{2}+2\pi n.$

Ответ: $\left[\arccos\dfrac{2}{\sqrt{5}}-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n; \arccos\dfrac{2}{\sqrt{5}}+\dfrac{\pi}{2}+2\pi n\right].$

Пример 19. Решить неравенство

$$\sin 2x+\sin x\geq 1+\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right).$$

Решение. Преобразуем неравенство

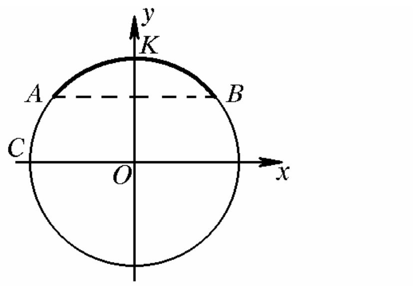
$$\sin 2x+\sin x\geq 1+\cos x-\sin x,$$

$$2\sin x\cos x+2\sin x\geq 1+\cos x,$$

$$2\sin x(1+\cos x)-(1+\cos x)\geq 0,$$

$$(1+\cos x)(2\sin x-1)\geq 0.$$

Если $1+\cos x=0,\ x=\pi+2\pi n,$ то неравенство верно. (Ошибочным является такое рассуждение: в силу того, что $1+\cos x\geq 0,$ наше неравенство равносильно следующему: $2\sin x-1\geq 0,$ т. к. если $1+\cos x=0,$ то при любом знаке выражения $2\sin x-1$ произведение равно нулю, т. е. неотрицательно.)



Если $1+\cos x>0,$ то получаем простейшее неравенство $\sin x\geq\dfrac{1}{2},$ решениям которого соответствует дуга AKB тригонометрического круга.

Ответ: объединение всех отрезков $\left[\dfrac{\pi}{6}+2\pi n; \dfrac{5\pi}{6}+2\pi n\right]$ и точек $\pi+2\pi n.$

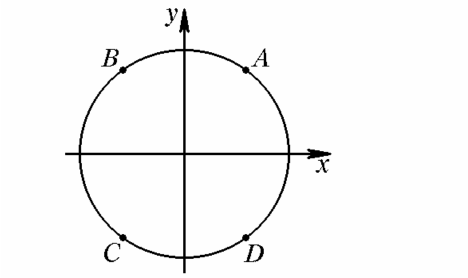
Следующие два примера показывают, что при отборе корней уравнений, удовлетворяющих некоторому неравенству, не всегда необходимо решать это неравенство. Значительно проще проверить, удовлетворяют ли найденные решения неравенству.

Пример 20. Найти все решения уравнения

$$4\sin^4 x + \sin^2 2x = 2\operatorname{ctg}^2 x,$$

удовлетворяющие неравенству $\sin x \geq 2\cos x$.

Решение. Понизим порядок



$$(1-\cos 2x)^2 + \sin^2 2x = 2\frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x},\ 1-\cos 2x = \frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}.$$

Положив $t = \cos 2x$, получаем $1-t = \dfrac{1+t}{1-t}$, $t^2 - 3t = 0$, откуда $\cos 2x = 0$, так как $|\cos 2x| \leq 1$. Итак, $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2}$. Отметив найденные корни на тригонометрическом круге, сразу устанавливаем, что корни, соответствующие точке B, удовлетворяют неравенству $\sin x \geq 2\cos x$, так как во II четверти $\sin x > 0$, $\cos x < 0$, точке D – посторонние: $\sin x < 0$, $\cos x > 0$, точке A – посторонние, т. к. $\sin x = \cos x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Корни, соответствующие точке C, – искомые, т. к. $\sin x = \cos x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Ответ: $\pi \pm \dfrac{\pi}{4} + 2\pi m.$

Пример 21. Решить уравнение $\sqrt{6\sin x \cos 2x} = \sqrt{-7\sin 2x}$.

Решение. Равенство $\sqrt{A} = \sqrt{B}$ равносильно системе

$$\begin{cases} A = B, \\ A \geq 0, \\ B \geq 0. \end{cases}$$

т. е. системе

$$\begin{cases} A = B, \\ B \geq 0. \end{cases}$$

Следовательно, найдя корни уравнения, мы не должны проверять выполнение неравенства $\sin x \cos 2x \geq 0$, достаточно только выбрать корни, удовлетворяющие неравенству $\sin 2x \leq 0$. Имеем: $6\sin x \cos 2x = -7\sin 2x$, $2\sin x(3\cos 2x + 7\cos x) = 0$. Отсюда:
а) $\sin x = 0$, $x = \pi n$ – все корни походят; б) $3\cos 2x + 7\cos x = 0$.

Положив $t = \cos x$, получаем $3(2t^2 - 1) + 7t = 0$, $t = -\frac{3}{2}$ – постороннее значение, $t = \frac{1}{3}$. Итак, $\cos x = \frac{1}{3}$, тогда неравенство $\sin 2x \leq 0$ равносильно неравенству $\sin x \leq 0$. Отсюда $x = -\arccos\frac{1}{3} + 2\pi m$.

Ответ: $x = \pi n$, $x = -\arccos\frac{1}{3} + 2\pi m$.

Тригонометрические неравенства возникают при решении уравнений, содержащих модули.

Пример 22. Решить уравнение $\left|\sin x - \frac{1}{2}\right| = \cos x - \frac{1}{2}$.

Решение. (См. также II способ решения примера 9.) Левая часть уравнения неотрицательна, поэтому решения находятся из системы

$$\begin{cases} \pm\left(\sin x - \frac{1}{2}\right) = \cos x - \frac{1}{2}, \\ \cos x - \frac{1}{2} \geq 0. \end{cases}$$

Для знака «+» получаем: $\sin x = \cos x,\ tgx = 1,\ x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k \Rightarrow$ $\Rightarrow \cos x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos x = +\dfrac{1}{\sqrt{2}} > \dfrac{1}{2},\ x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n.$

Для знака «–»: $\sin x + \cos x = 1,\ \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1,\quad x + \dfrac{\pi}{4} =$ $= \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n,\ \ x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n \Rightarrow x = 2\pi n,\ x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n.$

Для второй серии решений $\cos x - \dfrac{1}{2} < 0.$

Ответ: $\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n,\ 2\pi n.$

Пример 23. Решить уравнение $2 + \sqrt{3}\sin x + |\cos x| = 4\cos^2 x.$

Решение. Рассмотрим два случая.

1) $\cos x \geq 0.$ (*)

Тогда $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 2\cos 2x,\ \cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \cos 2x.$ При решении этого уравнения можно разложить разность косинусов на множители. Но проще, используя четность и 2π – периодичность косинуса, сразу написать $2x = \pm\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) + 2\pi n,$ откуда $x = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n,\ x = \dfrac{\pi}{9} + \dfrac{2\pi n}{3}.$ Отметив найденные корни на тригонометрическом круге, получаем, что неравенству (*) удовлетворяют $x = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n,\ \ x = \dfrac{\pi}{9} + 2\pi n.$

2) $\cos x < 0.$ (**)

Тогда $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 2\cos 2x,\ \cos\left(x - \dfrac{2\pi}{3}\right) = \cos 2x,\quad 2x =$ $= \pm\left(x - \dfrac{2\pi}{3}\right) + 2\pi n,$ откуда $x = -\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ x = \dfrac{2\pi}{9} + \dfrac{2\pi n}{3}.$ Неравенству (**) удовлетворяют $x = -\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ \ x = \dfrac{8\pi}{9} + 2\pi n.$

Ответ: $-\dfrac{\pi}{3}+2\pi n,\ \dfrac{\pi}{9}+2\pi n,\ -\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n,\ \dfrac{8\pi}{9}+2\pi n.$

§4. Уравнения, системы уравнений и неравенства, содержащие параметр

В задачах с параметром необходимом определить, при каких значениях параметра задача имеет решения и для всех таких значений найти все решения.

Пример 24. Решить уравнение $\sin x=\sqrt{a\cos x+1}.$

Решение. Равенство $A=\sqrt{B}$ равносильно системе $\begin{cases}A\ge 0,\\ A^2=B.\end{cases}$

Имеем: $\begin{cases}\sin x\ge 0,\\ \sin^2 x=a\cos x+1.\end{cases}$

Отсюда

$$0=a\cos x+\cos^2 x.$$

а) $\cos x=0.$ Неравенству $\sin x\ge 0$ удовлетворяют корни $x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n.$

б) $\cos x+a=0,$ т. е. $\cos x=-a\ne 0$ при $a\ne 0,$ тогда $\sin x=\sqrt{1-a^2}$ $(\sin x\ge 0),$ где $|a|\le 1.$ Отметим, что если $\alpha=\arccos p,$ то $\sin\alpha\ge 0,$ так как из определения функции $f(t)=\arccos t,$ $f(t)\in[0,\pi].$ Отсюда следует ответ.

Ответ. При $0<|a|\le 1$ $x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n$ и $x=\arccos(-a)+2\pi n;$

при $|a|>1$ и $a=0,$ $x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n.$

Пример 25. Найти все значения параметра *a,* при которых уравнение $(1-a)\mathrm{tg}^2 x-\dfrac{2}{\cos x}+1+3a=0$ имеет более одного решения на интервале $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right).$

Решение. Положим $t=\dfrac{1}{\cos x}$, тогда из тождества $tg^2 x+1=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ следует $(1-a)(t^2-1)-2t+1+3a=0$, т. е. $(1-a)t^2-2t+4a=0$.

При $a=1$ получаем линейное уравнение $-2t+4=0$, $t=2$, $\cos x=\dfrac{1}{2}$. Это уравнение на $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ имеет одно решение, значит, $a=1$ не удовлетворяет условию задачи. При $a\neq 1$ получаем квадратное уравнение, его корни $t_1=2$, $t_2=\dfrac{2a}{1-a}$, т. е. $\cos x=\dfrac{1}{2}$, $\cos x=\dfrac{1-a}{2a}$. На промежутке $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ функция $f(x)=\cos x$ каждое значение из интервала $(0;1)$ принимает ровно один раз, поэтому условие задачи равносильно следующему: найти все a, для которых $\dfrac{1-a}{2a}\in(0;1)$ и $\dfrac{1-a}{2a}\neq\dfrac{1}{2}$. Отсюда $a\in\left(\dfrac{1}{3};1\right)$ и $a\neq\dfrac{1}{2}$.

Ответ: $\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2};1\right)$.

Пример 26. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\sin x+2\sin y=0,\\ \cos x+2\cos y=a.\end{cases}$$

Решение. Преобразуем уравнения системы и рассмотрим сумму их квадратов

$$\begin{cases}\sin x=-2\sin y,\\ \cos x=a-2\cos y,\end{cases}\Rightarrow 1=a^2-4a\cos y+4.$$

При $a=0$ полученное равенство невозможно. При $a\neq 0$ $\cos y=\dfrac{a^2+3}{4a}$. Таким образом, $\left|\dfrac{a^2+3}{4a}\right|\le 1$, $\dfrac{|a|^2+3}{4|a|}\le 1$, $|a|^2-4|a|+3\le 0$, $1\le|a|\le 3$. Теперь из второго уравнения системы $\cos x=a-2\dfrac{a^2+3}{4a}=\dfrac{a^2-3}{2a}$. Значит, необходимо $\left|\dfrac{a^2-3}{2a}\right|\le 1$. Если

$|a| \geq \sqrt{3}$, то $|a|^2 - 3 \leq 2|a|$, $-1 \leq |a| \leq 3$, и мы получаем $\sqrt{3} \leq |a| \leq 3$. Если $|a| < \sqrt{3}$, то $3 - |a|^2 \leq 2|a|$, $|a| \geq 1$, т. е. $1 \leq |a| < \sqrt{3}$. Таким образом, для всех a, таких, что $1 \leq |a| \leq 3$, выполняются неравенства $|\cos y| \leq 1$ и $|\cos x| \leq 1$ т. е. существуют решения системы. Из первого уравнения системы получаем, что $\sin x$ и $\sin y$ должны иметь противоположные знаки.

Ответ. При $|a| < 1$ и $|a| > 3$ система решений не имеет;

при $1 \leq |a| \leq 3$ $y = \pm \arccos \dfrac{a^2 + 3}{4a} + 2\pi n,$

$$x = \mp \arccos \frac{a^2 - 3}{2a} + 2\pi m.$$

Пример 27. Найти все значения параметра a, при которых неравенство $\left|3\sin^2 x + a\sin 2x + \cos^2 x + a\right| \leq 3$ верно при всех $x \in R$.

Решение. Преобразуем неравенство:

$$\left|3\frac{1-\cos 2x}{2} + a\sin 2x + \frac{1+\cos 2x}{2} + a\right| \leq 3,$$

$$\left|a\sin 2x - \cos 2x + a + 2\right| \leq 3,$$

т. е. $-3 \leq a\sin 2x - \cos 2x + a + 2 \leq 3$,

$-5 - a < a\sin 2x - \cos 2x \leq 1 - a.$

Так как $a\sin 2x - \cos 2x = \sqrt{a^2+1}\sin(2x - \varphi)$, то наибольшее значение функции $f(x) = a\sin 2x - \cos 2x$ равно $\sqrt{a^2+1}$, наименьшее равно $-\sqrt{a^2+1}$, поэтому неравенства $-5 - a \leq f(x) \leq 1 - a$ справедливы при всех значениях x тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} -a - 5 \leq -\sqrt{a^2+1}, \\ \sqrt{a^2+1} \leq 1 - a. \end{cases}$$

Из первого неравенства находим $a \geq -\dfrac{12}{5}$, из второго $a \leq 0$.

Ответ: $\left[-\dfrac{12}{5}; 0\right]$.

Контрольные вопросы

1(1+1). (СПГПУ). Решите уравнение

$$tgx - \frac{1}{\cos x} = 1. \qquad \text{(1 балл)}$$

Решите также возведением в квадрат преобразованного уравнения

(+ 1 балл).

2(2). (МГУ, геологический фак-т). Найдите наибольший корень уравнения

$$\sqrt{8 - x - \cos 2x} = \sqrt{10 - x - \sin x}.$$

Решите уравнения 3 -7:

3(2). (МГТУ). $2\cos^2 x = 3\sin x.$

4(2). (Академия ФСБ). $\sin 3x - \sin x + \cos 2x = 1.$

5(2). (МГТУ). $\sqrt{1 - \cos x} = \sqrt{2}\sin x.$

6(2). (МГИЭТ). $\sin 2x - \cos 2x = 1 - ctgx \cdot \cos 2x.$

7(3). (МФТИ). $\sin 3x + |\sin x| = \sin 2x.$

8(3). (МГУ, Черноморский филиал). Решите неравенство

$$3\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x} - 1} - \sqrt{\frac{1}{\sin^2 x} - 1} < 0.$$

Задачи

Решите уравнения 1 -9:

1(2). (МФТИ). $\left(\sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x\right)^2 = 7 + 3\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right).$

2(2). (МФТИ). $20\sin^3 x + 3\cos x = 3\cos 3x + 4\sin x.$

3(3). (МФТИ). $\cos 3x\sqrt{-ctg\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = \cos\left(4x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(2x + \frac{3\pi}{4}\right).$

4(4). (СПГУ). $\cos x\left(2\sin x - 3\right) = 2\sqrt{3}\cos 2x + 2\sin x.$

5(4). (СПГУ). $\cos x + \sin 3x = \sin 4x + \cos 4x + 1.$

6(4). (МГУ, мехмат). $\sqrt{-3\sin 2x} = -2\sin 2x - \sin x + \cos x - 1.$

7(4). (МФТИ).

$$\frac{\sin 3x}{\cos 2x\cos 5x} + \frac{\sin 3x}{\cos 5x\cos 8x} = \sin 8x - tg2x.$$

8(4). (МФТИ). $\sin\left(\frac{\pi}{6}\cos 2x\right)=\cos\left(\frac{4}{3}\pi\sin x\right).$

9(5). (МГУ, ВМиК). $8\left|\cos x\right|\sqrt{8+\left|\cos x\right|+8\cos 2x}-32\cos 2x=31.$

10(5). (МАТИ). При каких значениях параметра c уравнение $3\sin x+3\cos x+2\sin 2x+c=0$ имеет решение?

11(5). (МГУ, мехмат). Решите неравенство

$$\frac{4-x-\sqrt{10-x^2}}{\sin\frac{x-2}{8}-\sin\frac{2x-5}{8}}\le 0.$$

12(5). (МФТИ). Решите систему уравнений

$$\begin{cases}3\cos(4x-2y)=\sqrt{2}\cos(2x-2y),\\ \sqrt{2}\sin(x+y)=3\sin(y-x).\end{cases}$$

13(5). (МФТИ). Для каждого значения параметра $\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ найти максимальное значение $g(\alpha)$ функции $f(x;y)=x(x-1)+y(y+2)$ на множестве точек $(x;y)$ таких, что

$$x^2+y^2\le x\cos\alpha+y\sin\alpha. \qquad \text{(3 балла)}$$

Найти значения параметра $\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, при которых $g(\alpha)$ принимает максимальное значение. (2 балла)