§9. Асимптоты

На рис. изображен график функции $f(x)=\dfrac{1}{x}$. Как мы уже отмечали, $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$. Геометрически это соответствует тому, что при $x\to 0$ график неограниченно приближается к оси y (прямой $x = 0$); при $x\to\infty$ график неограниченно при-

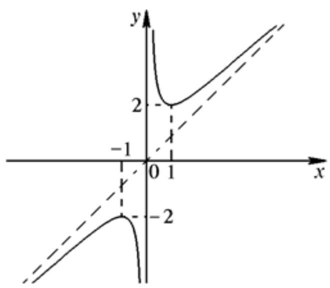

Рис. 2

ближается к оси x (прямой $y = 0$). В этом случае говорят, что график имеет вертикальную асимптоту $x = 0$ и горизонтальную асимптоту $y = 0$.

Бывают еще и наклонные асимптоты. Многим знаком график функции $y = x + \frac{1}{x}$ (рис. 2). Так как $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \infty$, то график имеет вертикальную асимптоту $x = 0$. При $x \to \infty$ горизонтальной асимптоты нет: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$, и график неограниченно приближается к прямой $y = x$ $\left(\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - x) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0 \right)$. Прямая $y = x$ является наклонной асимптотой графика $y = x + \frac{1}{x}$. Дадим теперь определения всех типов асимптот.

I. Прямая $x = a$ называется *вертикальной асимптотой* графика $y = f(x)$, если $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \infty$. Так, для функций $f(x) = \frac{1}{x}$ и $f(x) = x + \frac{1}{x}$ (рис. 2) $\lim\limits_{x \to 0+0} f(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x \to 0-0} f(x) = \infty$; каждый из этих графиков имеет вертикальную асимптоту $x = 0$. А вот график $y = 2^{1/x}$ (рис. 3) имеет одностороннюю вертикальную асимптоту $x = 0$ ($\lim\limits_{x \to 0+0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to 0-0} f(x) = 0$).

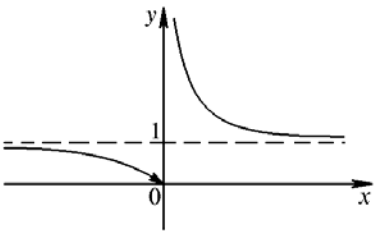

Рис. 3

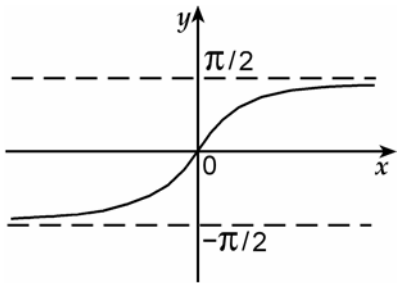

Рис. 4

II. Прямая $y = b$ называется *горизонтальной асимптотой* графика $y = f(x)$, если $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ или $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$. Так, для функции $f(x) = \frac{1}{x}$ $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$ (асимптота $y = 0$). Для графика на рис. 3

горизонтальной асимптотой является прямая $y=1$. А вот график $y=\operatorname{arctg}x$ (рис. 4) имеет горизонтальную асимптоту $y=\frac{\pi}{2}$ при $x \to +\infty$ и горизонтальную асимптоту $y=-\frac{\pi}{2}$ при $x \to -\infty$.

III. Прямая $y=kx+b$ называется *наклонной асимптотой* графика $y=f(x)$, если $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx-b\right)=0$ или $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-kx-b\right)=0.$ Горизонтальные асимптоты являются частным случаем наклонных (при $k=0$). График $y=x+\frac{1}{x}$ (рис. 2) имеет двустороннюю наклонную асимптоту $y=x$ ($\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-x\right)=0$).

График $y=x+\operatorname{arctg}x$ имеет односторонние наклонные асимптоты:

$$y=x+\frac{\pi}{2}$$

при $x \to +\infty$ и $y=x-\frac{\pi}{2}$ при $x \to -\infty$ (рис. 5).

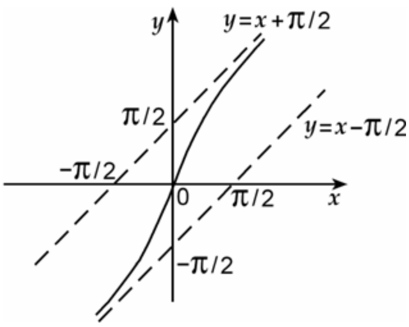

Рис. 5

Наклонные асимптоты при $k \neq 0$ могут иметь место лишь в том случае, когда $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\infty$ или $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty.$

Пусть прямая $y=kx+b-$ двусторонняя наклонная асимптота графика $y=f(x)$. Заметим, что $\frac{f(x)}{x}=\frac{f(x)-kx-b}{x}+k+\frac{b}{x}.$

Так как $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-kx-b\right)=0$ и $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0,$ то $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=k.$ Ясно, что $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)=b.$ Итак,

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x};\ \ b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right). \qquad (2)$$

Обратно, если существуют числа k и b, удовлетворяющие условию (2), то $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-kx-b\right)=0$, т. е. $y=kx+b-$ наклонная асимптота. В случае односторонних наклонных асимптот k и b ищутся по формулам (2), где ∞ заменяется на $+\infty$ или $-\infty$.

Отметим, что существование конечного предела $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ еще не означает наличия асимптоты. Так, для функции $y=\sqrt{x}$: $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$; $b=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$.

Поэтому график не имеет асимптоты при $x\to+\infty$.

Пример 10. Найти асимптоты графика $y=\frac{(x-1)^3}{(x-2)^2}$.

Решение. Ясно, что $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\infty$,

поэтому график имеет вертикальную асимптоту $x=2$. Далее, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$. Поэтому ищем

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)^3}{x(x-2)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^3-4x^2+4x}=1;$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x-1)^3}{(x-2)^2}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x-1}{x^2-4x+4}=1.$$

График имеет двустороннюю наклонную асимптоту $y=x+1$.

Пример 11. Найти асимптоты графика $y=x+\sqrt{x^2-2x}$.

Решение. Функция определена при $x^2-2x\ge 0$, т. е. при $x\in(-\infty;0]\cup[2;+\infty)$. Так как в любой точке области определения функция имеет конечный предел, то вертикальных асимптот график не имеет. Исследуем наличие асимптот при $x\to\infty$ (горизонтальных или наклонных).

Так как $f(x)\ge x$ при $x\ge 2$, то $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. Поэтому ищем

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\sqrt{x^2-2x}}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\sqrt{1-\frac{2}{x}}\right)=2$$

(здесь использовано то, что $x=\sqrt{x^2}$ при $x \geq 0$). Далее,

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-2x}-x\right)\left(\sqrt{x^2-2x}+x\right)}{\sqrt{x^2-2x}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x}{\sqrt{x^2-2x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2}{\sqrt{1-\frac{2}{x}}+1}=\frac{-2}{\sqrt{1}+1}=-1.$$

График имеет наклонную асимптоту $y=2x-1$ при $x\to+\infty$. Обратим внимание на то, что при вычислении $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x}-x\right)$ мы столкнулись с разностью двух функций, каждая из которых имеет предел $+\infty$. Как говорят, имеет место неопределенность $\infty-\infty$. Непосредственно такой предел вычислить нельзя. Снова приходится прибегнуть к умножению и делению на «сопряженное» выражение (см. также примеры 6 и 7 из §8).

Что касается $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$, то это предел суммы двух функций, одна из которых имеет предел $-\infty$, а другая – предел $+\infty$. Опять-таки нужно применить аналогичное преобразование:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2-2x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(x+\sqrt{x^2-2x}\right)\left(x-\sqrt{x^2-2x}\right)}{x-\sqrt{x^2-2x}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x-\sqrt{x^2-2x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{1+\frac{\sqrt{x^2-2x}}{\sqrt{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{1+\sqrt{1-\frac{2}{x}}}=\frac{2}{1+\sqrt{1}}=1$$

(здесь мы воспользовались тем, что $x=-\sqrt{x^2}$ при $x<0$). График имеет горизонтальную асимптоту $y=1$ при $x\to-\infty$.