§8. Непрерывность функции

Если функция $f(x)$ определена в точке a и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$, то функция $f(x)$ называется *непрерывной* в точке a. Иными словами, функция $f(x)$ называется непрерывной в точке a, если для любой последовательности $\{x_n\}$ такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, выполняется равенство

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$. Оговорка $x_n \neq a$ здесь не нужна, так как при $x_n = a$ соответствующие значения $f(x_n)$ равны $f(a)$.

Функция $y = |\mathrm{sign} x| = \begin{cases} 1, \text{ если } x \neq 0; \\ 0, \text{ если } x = 0, \end{cases}$ график которой изображен на рис. 1, не является непрерывной в точке 0. В самом деле, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$, а $f(0) = 0$.

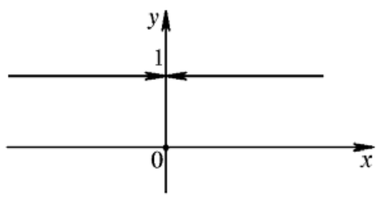

Рис. 1

Функция $f(x)$ называется *непрерывной на интервале* (конечном или бесконечном), если она непрерывна в каждой точке этого интервала. Элементарные функции, изучаемые в школьном курсе, непрерывны на любом интервале, на котором они определены. Например, функция x^3 непрерывна на $(-\infty;+\infty)$; функция $\sqrt{x}$ непрерывна на $(0;+\infty)$; функция $\mathrm{ctg}x$ непрерывна на $(0;\pi)$.

Для вычисления пределов функций часто бывает полезна следующая теорема. Пусть существует $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)$. Тогда существуют

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x);$$

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)g(x)\big) = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x); \ \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$$

(в последнем случае нужно требовать, чтобы $g(x) \neq 0$ при $x \neq a$ и чтобы $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$).

Отсюда следует, что любой многочлен $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ непрерывен в любой точке, а любая рациональная функция (отношение двух многочленов) непрерывна в любой точке, где знаменатель не обращается в ноль.

Пример 3. $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2 - 3x + 2\right) = 2^2 - 3\cdot 2 + 2 = 0.$

Пример 4. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{5x^3 - 8x + 1}{3x - 5} = \dfrac{5\cdot 1^3 - 8\cdot 1 + 1}{3\cdot 1 - 5} = 1.$

Пример 5. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x\to 1}(x + 1) = 1 + 1 = 2.$

В примерах 3 и 4 мы воспользовались непрерывностью данных функций в заданных точках. В примере 5 непосредственной подстановкой $x=1$ предел вычислить не удается, т. к. и числитель, и знаменатель дроби в точке $x=1$ обращаются в ноль. Как говорят, имеет место неопределенность 0 : 0. Для раскрытия этой неопределенности мы заметим, что $\frac{x^2-1}{x-1}=x+1$ при $x\neq 1$, поэтому при исследовании предела при $x\to 1$ функцию $\frac{x^2-1}{x-1}$ можно заменить на функцию $x+1$, которая непрерывна в точке $x=1$ (см. также пример 1).

Пример 6. $\lim\limits_{x\to 6}\frac{\sqrt{x-2}-2}{x-6}=\lim\limits_{x\to 6}\frac{\left(\sqrt{x-2}-2\right)\left(\sqrt{x-2}+2\right)}{(x-6)\left(\sqrt{x-2}+2\right)}=$

$$=\lim_{x\to 6}\frac{x-6}{(x-6)\left(\sqrt{x-2}+2\right)}=\lim_{x\to 6}\frac{1}{\sqrt{x-2}+2}=\frac{1}{\sqrt{6-2}+2}=\frac{1}{4}.$$

В последнем примере непосредственной подстановкой $x=6$ предел вычислить не удается (неопределенность 0 : 0). Приходится прибегнуть к искусственному приему – умножению числителя и знаменателя дроби на «сопряженное выражение» $\sqrt{x-2}+2$. В итоге оказывается, что при $x\neq 6$ данная дробь равна $\frac{1}{\sqrt{x-2}+2}$, а последняя функция уже непрерывна в точке $x=6$.

Соображения, связанные с непрерывностью функций, часто применяются при вычислении пределов последовательностей.

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n+5^n}=\lim_{n\to\infty}\left(5\cdot\sqrt[n]{1+\left(\frac{3}{5}\right)^n}\right)=5.$$

Пример 7.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)}=$$

$$= \frac{2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1-\frac{1}{n}}} = \frac{2\cdot 0}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = 0.$$

Пример 8.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n-3}{3n+\sqrt[3]{8n^3-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{3}{n}}{3+\sqrt[3]{8-\frac{1}{n^3}}} = \frac{2-3\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{3+\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{8-\frac{1}{n^3}}} = \frac{2-3\cdot 0}{3+\sqrt[3]{8}} = \frac{2}{5}.$$

Теорема о пределах суммы, произведения и частного двух функций остается справедливой, если в ней всюду заменить $x \to a$ на $x \to a+0,\ x \to a-0, x \to \infty, x \to +\infty, x \to -\infty.$

Можно доказать, что если $f(x) \neq 0$ в некоторой окрестности точки *a* (кроме, быть может, самой точки *a*) и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0,$ то $\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{f(x)} = \infty.$ Обратно, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty,$ то $\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{f(x)} = 0.$ Утверждения эти сохраняются, если заменить *a* на $a+0,\ a-0,\ \infty,\ +\infty,\ -\infty.$

Пример 9. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-2x^2}{2x^3+x+1} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x}}{2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}} = \frac{1-2\cdot 0}{2+0+0} = \frac{1}{2}.$