§3. Геометрическая прогрессия

Числовая последовательность, первый член которой отличен от нуля, а каждый член, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же число q, не равное нулю, называется *геометрической прогрессией.* Число q называется *знаменателем* прогрессии.

Из определения следует, что $x_{n+1} = x_n q,\ n = 1, 2, 3, \ldots$. Таким образом, определение геометрической прогрессии задает эту последовательность рекуррентно. Формула общего члена геометрической прогрессии имеет вид:

$$x_n = x_1 q^{n-1},\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

Лемма 2. (характеристическое свойство геометрической прогрессии**).** Числовая последовательность ненулевых членов является геометрической прогрессией тогда и только тогда, когда $b_n^2 = b_{n-1}b_{n+1}$, т. е. квадрат каждого члена, начиная со второго, является произведением соседних.

♦ Действительно, если b_n - геометрическая прогрессия, то $b_n^2 = \left(b_1 q^{n-1}\right)^2 = b_1 q^{n-2} \cdot b_1 q^n \Leftrightarrow b_n^2 = b_{n-1}b_{n+1}$.

И, наоборот, если $b_n^2 = b_{n-1}b_{n+1}$, то, разделив обе части на $b_n b_{n-1}$, получим $\dfrac{b_n}{b_{n-1}} = \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$. Это означает, что $\{b_n\}-$ геометрическая прогрессия. Если все элементы геометрической прогрессии положительны, то $b_n = \sqrt{b_{n-1}b_{n+1}}$. И тогда последовательность $\{b_n\}$ *положительных* членов является геометрической прогрессией тогда и только тогда, когда $b_n = \sqrt{b_{n-1}b_{n+1}}$, т. е. каждый член последовательности является средним геометрическим соседних. ♦

Пример 1. (МГУ, 2001, географ. ф-т) Числа a, b, c в указанном порядке образуют арифметическую прогрессию, а числа $a-c, c-b, 2a$ в указанном порядке образуют геометрическую прогрессию. Какое минимальное значение может принимать выражение $2a^2-4b^2-c^2+4bc+6a$?

♦По условию, a, b, c - арифметическая прогрессия, $a-c, c-b, 2a$ - геометрическая прогрессия. Воспользуемся леммами 2 и 1 (характеристическими свойствами геометрической и арифметической прогрессий): $\begin{cases} b=\dfrac{a+c}{2}, \\ (c-b)^2=2a(a-c) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b-c=\dfrac{a-c}{2}, \\ (c-b)^2=2a(a-c) \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b-c=\dfrac{a-c}{2}, \\ \left(\dfrac{a-c}{2}\right)^2=2a(a-c) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b-c=\dfrac{a-c}{2}, \\ (a-c)(a-c-8a)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} c=a, \\ b=a; \end{cases} \\ \begin{cases} c=-7a, \\ b=-3a. \end{cases} \end{array}\right.$$

Тогда заданное выражение примет вид:

$$2a^2-4b^2-c^2+4bc+6a=$$
$$\left[\begin{array}{l} 2a^2-4a^2-a^2+4a^2+6a=(a+3)^2-9; \\ 2a^2-4a^2-9a^2+12a^2+6a=(a+3)^2-9 \end{array}\right. =(a+3)^2-9\ge -9\ .$$

Видно, что минимальное значение выражения равно –9. **Ответ.** –9.♦