§2. Арифметическая прогрессия

Числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом d, называется *арифметической прогрессией.* Число d называется *разностью* арифметической прогрессии.

Из определения следует, что $x_{n+1} = x_n + d$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Таким образом, определение арифметической прогрессии задает эту последовательность рекуррентно. Формула общего члена арифметической прогрессии имеет вид:

$$x_n = x_1 + d(n-1),\ n = 1, 2, 3 \ldots$$

Лемма 1. (характеристическое свойство арифметической прогрессии). Числовая последовательность $\{a_n\}$ является арифметической прогрессией тогда и только тогда, когда $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, т. е. каждый член последовательности, начиная со второго, является полусуммой соседних, или средним арифметическим соседних членов.

♦Действительно, если задана арифметическая прогрессия, то

$$a_n = a_1 + d(n-1) \Leftrightarrow 2a_n = 2a_1 + 2d(n-1) \equiv$$

$$\equiv \left(a_1 + d\left(n-2\right)\right) + \left(a_1 + dn\right) = a_{n-1} + a_{n+1} \Leftrightarrow a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

И, наоборот, если для любого a_n выполнено условие $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$,
то $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \Leftrightarrow 2a_n = a_{n-1} + a_{n+1} \Leftrightarrow$
$a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n$. Это значит, что $\{a_n\}$ − арифметическая прогрессия.
♦

