Федеральное агентство по образованию
Федеральная заочная физико-техническая школа
при Московском физико – техническом институте
(государственном университете)

МАТЕМАТИКА

Последовательности. Предел последовательности. Предел функции. Производная

Задание №6 для 10-х классов

(2005-2006 учебный год)

г. Долгопрудный, 2006

Составитель: С.И. Колесникова, старший преподаватель кафедры высшей математики МФТИ.

математика: задание №6 для 10-х классов (2005-2006 учебный год). - М.: МФТИ, 2005, 32с.

Составитель:
Колесникова Софья Ильинична
Изд. лиц. №040060 от 21.08.96г. Подписано 28.03.06
Формат 60x90 1/16. Бумага типографская. Печать офсетная. Усл. печ. л. 2,0
Уч.-изд. л. 1,77. Тираж 1700. Заказ № 19-з.

Федеральная заочная физико-техническая школа
Московский физико-технический институт
(государственный университет)
«ФИЗТЕХ-ПОЛИГРАФ»

141700, Москов. обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
ФЗФТШ при МФТИ, тел/факс (495) 408-5145 – **заочное отделение**
тел./факс (495) 485-4227 – **очно-заочное отделение**
тел.409-9583 – **очное отделение**

E.mail: zftsh@pop3.mipt.ru

Наш сайт: www.school.mipt.ru

§1. Бесконечные последовательности. Формула общего члена

Пусть каждому натуральному числу n поставлено в соответствие некоторое число x. Это значит, что на множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел задана числовая функция $x = x(n)$; эта функция называется *бесконечной числовой последовательностью* (или просто *последовательностью*). Аргумент n этой функции записывается в виде индекса, т. е. вместо записи $x(n)$ употребляется запись x_n. Приведем примеры.

(I) 1; 1; 1; … (т. е. $x_n = 1$ для всех n);

(II) 1; 2; 4; 8; … (т. е. $x_n = 2^{n-1}$);

(III) последовательность, n-й член которой равен n-му знаку после запятой в десятичной записи числа $\frac{8}{33}$;

(IV) то же для числа π;

(V) последовательность, n-й член которой равен количеству простых чисел, не превосходящих n;

(VI) последовательность, n-й член которой равен площади правильного треугольника со стороной n.

Последовательность (II) удобно записать так: $x_n = 2^n$, $n = 0,1,2,3,\ldots$. Часто бывает удобно в качестве области определения последовательности рассматривать множество всех целых чисел n таких, что $n \ge n_0$, где n_0 – фиксированное целое число (при $n_0 = 1$ получаем множество $\mathbb{N}$). Например, последовательность $x_n = \frac{1}{n-1}$ имеет смысл рассматривать при $n \ge 2$, а последовательность $x_n = \sqrt{n+2}$ можно рассматривать при $n \ge -2$. Легко убедиться, что в примере (III) $x_1 = 2, x_2 = 4, x_3 = 2, x_4 = 4$ и т. д., т. е. $x_n = 3 + (-1)^n$, $n \ge 1$. Ясно также, что в примере (VI) $x_n = \frac{\sqrt{3}}{4} n^2$. А вот явные формулы для общего члена последовательностей (IV) и (V) написать невозможно. Тем не менее, многие свойства этих последовательностей установлены и без формул. Таким образом, явное задание формулы общего члена не является необходимым для изучения свойств последовательности.

И все же, при любом задании последовательности в первую очередь возникает вопрос, нельзя ли выписать явно формулу общего члена. Особенно часто такой вопрос возникает, когда последовательность задана рекуррентно, т. е. даны несколько первых членов последовательности и формула, выражающая последующие члены через предыдущие. Рассмотрим примеры таких последовательностей.

Пример 1. Числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом d, называется *арифметической прогрессией.* Число d называется *разностью* арифметической прогрессии.

Из определения следует, что $x_{n+1} = x_n + d$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Таким образом, определение арифметической прогрессии задает эту последовательность рекуррентно. Формула общего члена арифметической прогрессии имеет вид:

$$x_n = x_1 + d(n-1), \; n = 1, 2, 3 \ldots$$

Пример 2. Числовая последовательность, первый член которой отличен от нуля, а каждый член, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же число q, не равное нулю, называется *геометрической прогрессией.* Число q называется *знаменателем* прогрессии.

Из определения следует, что $x_{n+1} = x_n q$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Таким образом, определение геометрической прогрессии задает эту последовательность рекуррентно. Формула общего члена геометрической прогрессии имеет вид:

$$x_n = x_1 q^{n-1}, \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

Пример 3. Найти формулу общего члена последовательности, заданной рекуррентно: $x_1 = 1;\ x_{n+1} = 3x_n + 1,\ n = 1, 2, 3, \ldots$.

Решение. Рассмотрим вспомогательную последовательность $y_n = x_n + a$, где число a подбирается так, чтобы последовательность y_n была геометрической прогрессией. Подставляя $x_n = y_n - a$ и $x_{n+1} = y_{n+1} - a$ в рекуррентное соотношение, имеем:

$$y_{n+1} - a = 3(y_n - a) + 1, \text{ т. е. } y_{n+1} = 3y_n + (1 - 2a).$$

Последовательность y_n будет геометрической прогрессией, если $1-2a=0,$ т.е. $a=\frac{1}{2}.$ Так как $y_1=x_1+a=\frac{3}{2},$ то формула общего члена геометрической прогрессии y_n запишется так: $y_n=\frac{3}{2}3^{n-1}$ $\left(y_1=\frac{3}{2};\, q=3\right),$ т. е. $y_n=\frac{1}{2}3^n.$ Тогда $x_n=y_n-a=\frac{3^n-1}{2}.$

Пример 4. Последовательность Фибоначчи задается рекуррентно: $x_1=x_2=1;\, x_{n+2}=x_{n+1}+x_n,\, n=1,2,3,\ldots.$ Можно доказать, что формула общего члена этой последовательности имеет вид

$$x_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Рекуррентное соотношение может не задавать последовательности. Например, если $x_1=\frac{2}{3},\, x_{n+1}=\frac{1-x_n}{x_n},\, n=1,2,3,\ldots,$ то $x_2=\frac{1}{2},\, x_3=1,$ $x_4=0,$ и все члены, начиная с пятого, не определены.

§2. Понятие о пределе последовательности

В курсе алгебры и начал анализа 10 – 11 классов важную роль играет понятие производной, к которому мы придем в §5 настоящего задания. Производная определяется при помощи понятия предела функции, которое в обязательной школьной программе фактически отсутствует (не определяется аккуратно). В §§2 и 3 мы приведем схему построения теории пределов последовательностей и функций (почти без доказательств).

Интервал $(a-\varepsilon;a+\varepsilon),$ где $\varepsilon>0,$ называется ε – эпсилон-окрестность точки a. Предел числовой последовательности можно определить следующим образом.

Число a называется *пределом* последовательности x_n, если в любой ε – окрестности точки a лежат все члены последовательности x_n, за исключением, быть может, конечного их числа.

Иначе говоря, число a является пределом последовательности x_n, если вне любой окрестности точки a находится не более конечного числа членов x_n. Отсюда легко заметить, что изменение конечного числа членов последовательности не влияет ни на факт существования предела, ни на величину последнего. При этом несущественно также, определены ли члены последовательности при всех $n \ge 1$ или же начиная с некоторого номера n_0.

Тот факт, что последовательность x_n имеет предел a, записывается символически так:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ (или } x_n \to a \text{ при } n \to \infty\text{)}.$$

Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*; последовательность, не имеющая конечного предела, называется *расходящейся*.

Пример 1. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Доказательство. Точка $x_n = \frac{1}{n}$ принадлежит ε – окрестности точки $a = 0$ в том и только в том случае, когда $-\varepsilon < \frac{1}{n} < \varepsilon$, т. е. при $n > \frac{1}{\varepsilon}$ (следовательно, для всех n, кроме конечного числа значений). Это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Пример 2. («Теорема о двух милиционерах»).
Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$, и при всех n выполняются неравенства $x_n \le z_n \le y_n$, то и $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

Доказательство. (См. рис. 1). Рассмотрим произвольную ε – окрестность точки a. По определению предела, эта окрестность содержит все члены x_n, кроме конечного числа номеров. Рассмотрим те номера n, при которых и x_n, и y_n принадлежат данной окрестности. При этих n члены z_n также принадлежат данной окрестности. Это будут все z_n, кроме конечного их числа. По определению предела это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

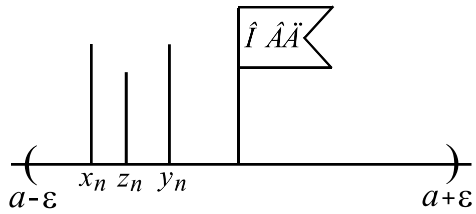


Рис. 1

При вычислении пределов на практике редко пользуются определением предела. Обычно применяют некоторые стандартные (доказанные в теоретических курсах) предельные равенства, например:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^a} = 0, \text{ если } a > 0; \ \lim_{n\to\infty} q^n = 0, \text{ если } |q| < 1 \qquad (1)$$

и т. д., а также различные теоремы о пределах. Сформулируем теоремы об арифметических операциях с пределами.

Если последовательности x_n и y_n сходятся, то сходятся и последовательности $x_n + y_n$, $x_n y_n$, $\frac{x_n}{y_n}$ (в последнем случае надо требовать, чтобы $y_n \neq 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$). При этом $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \lim_{n\to\infty} y_n; \ \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}.$$

Пример 3. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2 - 3n + 2}{n^2 + 2}$.

Решение. Имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2 - 3n + 2}{n^2 + 2} = \lim_{n\to\infty}\frac{2 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}}{1 + \frac{2}{n^2}} = \frac{2 - 3\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} + 2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{1 + 2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}} = \frac{2 - 3\cdot 0 + 2\cdot 0}{1 + 2\cdot 0} = 2.$$

Пример 4. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$, если $a>1$.

Доказательство. Обозначим $x_n=\sqrt[n]{a}-1$. Ясно, что $x_n>0$ при $a>1$, $n=1,2,3,\dots$. Тогда $a=\left(1+x_n\right)^n\ge 1+nx_n>nx_n$ (для доказательства можно применить неравенство Бернулли $\left(1+a\right)^n\ge 1+na$, справедливое при $a>-1$, $n=1,2,3,\dots$, которое легко доказывается методом математической индукции). Значит $0<x_n<\dfrac{a}{n}$.

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a}{n}=a\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$, то, по теореме о двух милиционерах, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$, и $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+x_n\right)=1+\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

Пример 5. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n+5^n}$.

Решение. Пусть $x_n=\sqrt[n]{3^n+5^n}$. Тогда $x_n>\sqrt[n]{5^n}$; с другой стороны, $x_n<\sqrt[n]{2\cdot 5^n}=5\cdot\sqrt[n]{2}$. Итак, $5<x_n<5\cdot\sqrt[n]{2}$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\left(5\cdot\sqrt[n]{2}\right)=5\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=5$, то, по теореме о двух милиционерах, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=5$.

Геометрическая прогрессия x_n называется *бесконечно убывающей*, если $|q|<1$ (q – знаменатель прогрессии). *Суммой* бесконечно убывающей геометрической прогрессии называется $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$, где S_n – сумма ее первых n членов. Известно, что $S_n=x_1\dfrac{q^n-1}{q-1}=$ $=\dfrac{x_1}{q-1}q^n+\dfrac{x_1}{1-q}$; поэтому сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна

$$S=\frac{x_1}{q-1}\lim_{n\to\infty}q^n+\frac{x_1}{1-q}=\frac{x_1}{q-1}\cdot 0+\frac{x_1}{1-q}=\frac{x_1}{1-q}.$$

Пример 6. Последовательность x_n задана рекуррентно: $x_1 = a$; $x_2 = b$; $x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_{n-2})$, $n = 3,4,\dots$. Доказать, что последовательность сходится и найти ее предел.

Решение. Имеем: $x_n - x_{n-1} = \frac{x_{n-2} - x_{n-1}}{2} = -\frac{1}{2}(x_{n-1} - x_{n-2})$. Подставляя в полученное равенство вместо n номера $n-1, n-2, \dots$, получим: $x_n - x_{n-1} = -\frac{1}{2}(x_{n-1} - x_{n-2}) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 (x_{n-2} - x_{n-3}) = \dots =$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} (x_2 - x_1) = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} (b-a).$$

Поэтому $x_n = a + (x_n - a) = a + (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \dots +$

$$+ (x_2 - x_1) = a + (b-a)\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-3} + \dots + 1\right).$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + \dots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right) = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$

(сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии),

то существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a + (b-a)\cdot\frac{2}{3} = \frac{a+2b}{3}$.

Последовательность, предел которой равен нулю, называется *бесконечно малой*. Последовательность x_n называется *бесконечно большой*, если последовательность $y_n = \frac{1}{x_n}$ является бесконечно малой. Для бесконечно больших последовательностей применяется запись $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Говорят, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, если x_n – бесконечно большая и $x_n > 0$ (кроме, быть может, конечного числа членов).

Говорят, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, если x_n – бесконечно большая и $x_n < 0$ (кроме, быть может, конечного числа членов).

Так как при любых α и любых $q > 1$ выполняются неравенства $n^\alpha > 0$ и $q^n > 0$, $n = 1,2,3, \ldots$, то из (1) следует, что при $\alpha > 0$ и $q > 1$ $\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha = +\infty$; $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty$. Если же $q < -1$, то последовательность q^n бесконечно большая, но знак ее все время меняется, поэтому неверно ни то, что $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty$, ни то, что $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = -\infty$.

§3. Понятие о пределе функции

Одним из стандартных определений предела функции, принятых в математическом анализе, является следующее (так называемое определение по Гейне).

Число b называется *пределом функции* $f(x)$ в точке a, если для любой последовательности x_n такой, что $x_n \neq a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$.

Это определение символически выражается записью $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ (или $f(x) \to b$ при $x \to a$). В определении предела рассматриваются значения x_n, не равные a, поэтому в самой точке a функция $f(x)$ может не быть определена; если значение $f(a)$ определено, то оно не обязано совпадать с b.

Пример 1. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$.

Доказательство. Функция $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ не определена при $x = 1$, но при $x_n \neq 1$ имеет место равенство $f(x_n) = x_n + 1$. Значит, если $x_n \neq 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 2$.

По определению предела функции, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$.

Число b называется пределом функции $f(x)$ в точке a справа (обозначается $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=b$), если для любой последовательности x_n такой, что $x_n > a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=b$.

Число b называется пределом функции $f(x)$ в точке a слева (обозначается $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=b$), если для любой последовательности x_n такой, что $x_n < a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=b$.

Пример 2. Найти пределы функции

$$\mathrm{sign}x=\begin{cases}1, \text{ если } x>0;\\ 0, \text{ если } x=0;\\ \text{-}1; \text{ если } x<0\end{cases}$$ справа и слева в точке 0.

Решение. Для любой последовательности x_n такой, что $x_n > 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, выполняется равенство $\mathrm{sign}x_n = 1$, поэтому $\lim\limits_{x\to 0+0} x = 1$. Для любой последовательности x_n такой, что $x_n < 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, выполняется равенство $\mathrm{sign}x_n = -1$, поэтому $\lim\limits_{x\to 0-0} x = -1$.

Замечание. Напомним, что функция $y = \mathrm{sign}x$ была определена в задании №3. График этой функции изображен на рис. 2. Можно доказать, что $\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{sign}x$ не существует. В самом деле, если бы этот предел существовал и равнялся b, то для любой последовательности x_n такой, что $x_n \neq 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, выполнялось бы равенство $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{sign}x_n = b$. Но при $x_n = \frac{1}{n}$ имеем $\mathrm{sign}x_n = 1$, значит, $b = 1$. Далее,

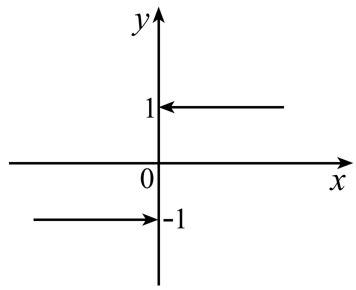


Рис. 2

при $x_n = -\frac{1}{n}$ имеем $\mathrm{sign}x_n = -1$, значит, $b = -1$. Полученное противоречие показывает, что $\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{sign}x$ не существует. При рассмотрении многих вопросов (например, при построении графиков) возникает понятие предела функции при $x \to \infty$ (применяется запись $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$). Говорят, что $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b,$ если для любой последовательности x_n такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty,$ выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b.$

Аналогично определяются записи $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b.$ Можно определить также понятие бесконечно большого предела функции. Например, говорят, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty,$ если для любой последовательности x_n такой, что $x_n \neq a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,$ выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty.$ Говорят, что $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty,$ если для любой последовательности x_n такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty,$ выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \infty.$

Аналогично можно определить, что значит $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty,$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty,$ $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = +\infty,$ $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \infty$ и т. д.

Можно доказать, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{sign} x = 1,$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{sign} x = -1,$ $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{sign} x$ не существует.

Можно доказать следующие равенства:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\alpha} = \infty, \text{ если } \alpha = 1, 2, 3, \ldots; \quad \lim_{x\to 0+0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\alpha} = +\infty, \text{ если } \alpha > 0;$$

$$\lim_{x\to \infty}\left(\frac{1}{x}\right)^{\alpha} = 0, \text{ если } \alpha = 1, 2, 3, \ldots; \quad \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^{\alpha} = 0, \text{ если } \alpha > 0;$$

$$\lim_{x\to 0} x^{\alpha} = 0, \text{ если } \alpha = 1, 2, 3, \ldots; \quad \lim_{x\to 0+0} x^{\alpha} = 0, \text{ если } \alpha > 0;$$

$$\lim_{x\to \infty} x^{\alpha} = \infty, \text{ если } \alpha = 1, 2, 3, \ldots; \quad \lim_{x\to +\infty} x^{\alpha} = +\infty, \text{ если } \alpha > 0.$$

На рис. 3 изображен график функции $y=\dfrac{1}{x}$. Для этой функции $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{1}{x}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{1}{x}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$. Если функция $f(x)$ определена в точке a и $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$, то функция $f(x)$ называется *непрерывной* в точке a. Иными словами, функция $f(x)$ называется непрерывной в точке a, если для любой последовательности x_n такой, что $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(a)$. Оговорка $x_n\neq a$ здесь не нужна, так как при $x_n=a$ соответствующие значения $f(x_n)$ равны $f(a)$.

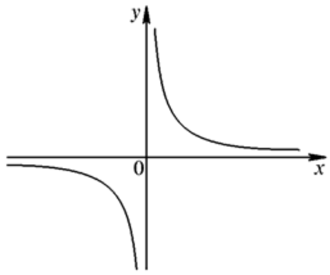


Рис. 3

Функция $y=|\mathrm{sign}x|=\begin{cases}1, \text{ если } x\neq 0;\\ 0, \text{ если } x=0,\end{cases}$ график которой изображен на рис. 4, не является непрерывной в точке 0. В самом деле, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$, а $f(0)=0$.

Функция $f(x)$ называется *непрерывной на интервале* (конечном или бесконечном), если она непрерывна в каждой точке этого интервала. Элементарные функции, изучаемые в школьном курсе, непрерывны на любом интервале, на котором они определены. Например, функция x^3 непрерывна на $(-\infty;+\infty)$; функция $\sqrt{x}$ непрерывна на $(0;+\infty)$; функция $\mathrm{ctg}x$ непрерывна на $(0;\pi)$.

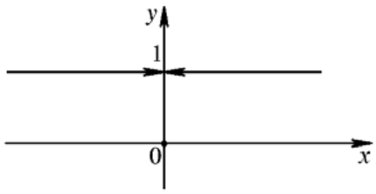


Рис. 4

На языке последовательностей непрерывность элементарных функций может быть сформулирована так. Для функции $y=x^k$, $k\in\mathbb{R}$: если $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a>0$, то $\lim\limits_{n\to\infty}x_n^k=a^k$. Для функции $y=\sin x$: если $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n=\sin a$ и т. д.

Для вычисления пределов функций часто бывает полезна следующая теорема. Пусть существует $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)$. Тогда существуют

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x);$$
$$\lim_{x\to a}\left(f(x)g(x)\right)=\lim_{x\to a} f(x)\lim_{x\to a} g(x);$$
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$$

(в последнем случае нужно требовать, чтобы $g(x)\neq 0$ при $x\neq a$ и чтобы $\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$).

Отсюда следует, что любой многочлен $P(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$ непрерывен в любой точке, а любая рациональная функция (отношение двух многочленов) непрерывна в любой точке, где знаменатель не обращается в ноль.

Пример 3. $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2-3x+2\right)=2^2-3\cdot 2+2=0.$

Пример 4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x^3-8x+1}{3x-5}=\dfrac{5\cdot 1^3-8\cdot 1+1}{3\cdot 1-5}=1.$

Пример 5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\left(x+1\right)=1+1=2.$

В примерах 3 и 4 мы воспользовались непрерывностью данных функций в заданных точках. В примере 5 непосредственной подстановкой $x=1$ предел вычислить не удается, т. к. и числитель, и знаменатель дроби в точке $x=1$ обращаются в ноль. Как говорят, имеет место неопределенность 0 : 0. Для раскрытия этой неопределенности мы заметим, что $\dfrac{x^2-1}{x-1}=x+1$ при $x\neq 1$, поэтому при исследовании предела при $x\to 1$ функцию $\dfrac{x^2-1}{x-1}$ можно заменить на функцию $x+1$, которая непрерывна в точке $x=1$ (см. также пример 1).

Пример 6. $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt{x-2}-2}{x-6}=\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\left(\sqrt{x-2}-2\right)\left(\sqrt{x-2}+2\right)}{(x-6)\left(\sqrt{x-2}+2\right)}=$

$$= \lim_{x\to 6}\frac{x-6}{(x-6)\left(\sqrt{x-2}+2\right)} = \lim_{x\to 6}\frac{1}{\sqrt{x-2}+2} = \frac{1}{\sqrt{6-2}+2} = \frac{1}{4}.$$

В последнем примере непосредственной подстановкой $x = 6$ предел вычислить не удается (неопределенность 0 : 0). Приходится прибегнуть к искусственному приему – умножению числителя и знаменателя дроби на «сопряженное выражение» $\sqrt{x-2}+2$. В итоге оказывается, что при $x \neq 6$ данная дробь равна $\frac{1}{\sqrt{x-2}+2}$, а последняя функция уже непрерывна в точке $x = 6$.

Соображения, связанные с непрерывностью функций, часто применяются при вычислении пределов последовательностей.

Пример 7.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)} =$$

$$= \frac{2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1-\frac{1}{n}}} = \frac{2\cdot 0}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = 0,$$

так как, в силу непрерывности функции $\sqrt{x}$,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \sqrt{1};\ \lim_{n\to\infty}\sqrt{1-\frac{1}{n}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)} = \sqrt{1}.$$

Пример 8.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n-3}{3n+\sqrt[3]{8n^3-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{3}{n}}{3+\sqrt[3]{8-\frac{1}{n^3}}} = \frac{2-3\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{3+\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{8-\frac{1}{n^3}}} = \frac{2-3\cdot 0}{3+\sqrt[3]{8}} = \frac{2}{5},$$

так как, в силу непрерывности функции $\sqrt[3]{x}$,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{8-\frac{1}{n^3}}=\sqrt[3]{\lim_{n\to\infty}\left(8-\frac{1}{n^3}\right)}=\sqrt[3]{8}.$$

Теорема о пределах суммы, произведения и частного двух функций остается справедливой, если в ней всюду заменить $x\to a$ на $x\to a+0,\ x\to a-0, x\to\infty, x\to+\infty, x\to-\infty.$

Можно доказать, что если $f(x)\neq 0$ в некоторой окрестности точки *a* (кроме, быть может, самой точки *a*) и $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0,$ то $\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=\infty.$ Обратно, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty,$ то $\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=0.$ Утверждения эти сохраняются, если заменить *a* на $a+0, a-0, \infty, +\infty, -\infty.$

Пример 9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-2x^2}{2x^3+x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\frac{2}{x}}{2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=\dfrac{1-2\cdot 0}{2+0+0}=\dfrac{1}{2}.$

Пример 10. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-x^2+x}{x^3+3}.$

Решение. Рассмотрим предел обратной величины:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+3}{x^4-x^2+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{3}{x^4}}{1-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=\frac{0+3\cdot 0}{1-0+0}=0,$$

поэтому искомый предел равен ∞.

§4. Асимптоты

На рис. 3 изображен график функции $f(x)=\frac{1}{x}.$ Как мы уже отмечали, $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)=+\infty;\quad \lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=-\infty;\ \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0.$ Геометрически это соответствует тому, что при $x\to 0$ график неограниченно приближается к оси y (прямой $x = 0$); при $x \to \infty$ график неограниченно приближается к оси x (прямой $y = 0$). В этом случае говорят, что график имеет вертикальную асимптоту $x = 0$ и горизонтальную асимптоту $y = 0$.

Бывают еще и наклонные асимптоты. Многим знаком график функции $y = x + \dfrac{1}{x}$ (рис. 5). Так как $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \infty$, то

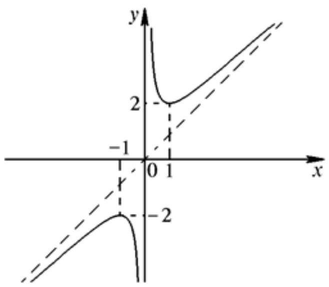


Рис. 5

график имеет вертикальную асимптоту $x = 0$. При $x \to \infty$ горизонтальной асимптоты нет: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, и график неограниченно приближается к прямой $y = x$ $\left(\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x) - x\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x} = 0\right)$. Прямая $y = x$ является наклонной асимптотой графика $y = x + \dfrac{1}{x}$.

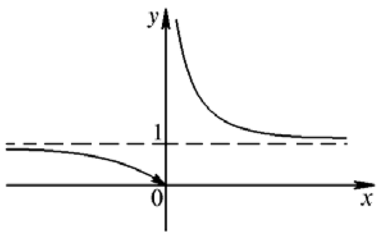


Рис. 6

Дадим теперь определения всех типов асимптот.

I. Прямая $x = a$ называется *вертикальной асимптотой* графика $y = f(x)$, если $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \infty$. Так, для функций $f(x) = \dfrac{1}{x}$ (рис. 3) и $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ (рис.5) $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x) = \infty$; каждый из этих графиков имеет вертикальную асимптоту $x = 0$. А вот график $y = 2^{1/x}$ (рис. 6) имеет одностороннюю вертикальную асимптоту $x = 0$ ($\lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x) = 0$).

II. Прямая $y = b$ называется *горизонтальной асимптотой* графика $y = f(x)$, если $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = b$ или $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = b$. Так, для функции

$f(x)=\dfrac{1}{x}$ (рис. 3) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$ (асимптота $y=0$). Для графика на рис. 6 горизонтальной асимптотой является прямая $y=1$. А вот график $y=\operatorname{arctg}x$ (рис. 7) имеет горизонтальную асимптоту $y=\dfrac{\pi}{2}$ при $x\to+\infty$ и горизонтальную асимптоту $y=-\dfrac{\pi}{2}$ при $x\to-\infty$.

III. Прямая $y=kx+b$ называется *наклонной асимптотой* графика $y=f(x)$, если $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-kx-b)=0$ или $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-kx-b)=0$. Горизонтальные асимптоты являются частным случаем наклонных (при $k=0$). График $y=x+\dfrac{1}{x}$ (рис.5) имеет двустороннюю наклонную асимптоту $y=x$ ($\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-x)=0$).

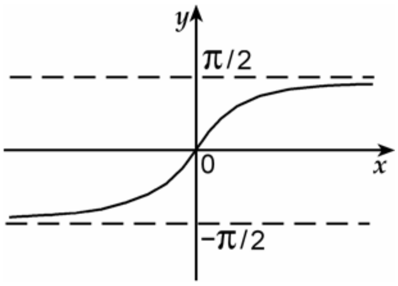


Рис. 7

График $y=x+\operatorname{arctg}x$ имеет односторонние наклонные асимптоты:

$$y=x+\frac{\pi}{2}$$

при $x\to+\infty$ и $y=x-\dfrac{\pi}{2}$ при $x\to-\infty$ (рис. 8).

Наклонные асимптоты при $k\neq 0$ могут иметь место лишь в том случае, когда $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\infty$ или $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty$.

Пусть прямая $y=kx+b$ - двусторонняя наклонная асимптота графика $y=f(x)$. Заметим, что $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{f(x)-kx-b}{x}+k+\dfrac{b}{x}$.

Так как $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx-b)=0$ и $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$, то $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k$. Ясно, что $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx)=b$. Итак,

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x};\quad b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx). \qquad (2)$$

Обратно, если существуют числа k и b, удовлетворяющие условию (2), то $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-kx-b\right)=0$, т. е. $y=kx+b$ - наклонная асимптота. В случае односторонних наклонных асимптот k и b ищутся по формулам (2), где ∞ заменяется на $+\infty$ или $-\infty$.

Отметим, что существование конечного предела $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ еще не означает наличия асимптоты. Так, для функции

$y=\sqrt{x}:k=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=0;$

$b=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty.$

Поэтому график не имеет асимптоты при $x\to+\infty$.

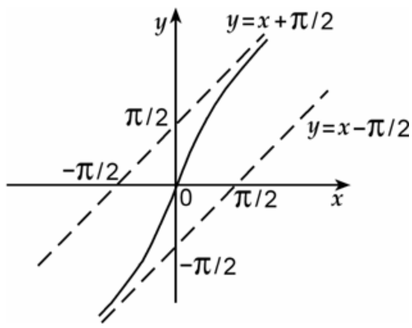


Рис. 8

Пример 1. Найти асимптоты графика $y=\dfrac{(x-1)^3}{(x-2)^2}$.

Решение. Ясно, что $\lim\limits_{x\to2}f(x)=\infty$, поэтому график имеет вертикальную асимптоту $x=2$. Далее, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$. Поэтому ищем

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)^3}{x(x-2)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^3-4x^2+4x}=1;$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x-1)^3}{(x-2)^2}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x-1}{x^2-4x+4}=1.$$

График имеет двустороннюю наклонную асимптоту $y=x+1$.

Пример 2. Найти асимптоты графика $y=x+\sqrt{x^2-2x}$.

Решение. Функция определена при $x^2-2x\ge0$, т. е. при $x\in(-\infty;0]\cup[2;+\infty)$. Так как в любой точке области определения функция имеет конечный предел, то вертикальных асимптот график не имеет. Исследуем наличие асимптот при $x\to\infty$ (горизонтальных или наклонных).

Так как $f(x) \geq x$ при $x \geq 2$, то $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Поэтому ищем

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{2}{x}}\right) = 2$$

(здесь использовано то, что $x = \sqrt{x^2}$ при $x \geq 0$). Далее,

$$b = \lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - 2x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2 - 2x} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-2x} - x\right)\left(\sqrt{x^2 - 2x} + x\right)}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2}{\sqrt{1 - \frac{2}{x}} + 1} = \frac{-2}{\sqrt{1} + 1} = -1.$$

График имеет наклонную асимптоту $y = 2x - 1$ при $x \to +\infty$. Обратим внимание на то, что при вычислении $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2 - 2x} - x\right)$ мы столкнулись с разностью двух функций, каждая из которых имеет предел $+\infty$. Как говорят, имеет место неопределенность $\infty - \infty$. Непосредственно такой предел вычислить нельзя. Снова приходится прибегнуть к умножению и делению на «сопряженное» выражение (см. также примеры 6 и 7 из §3).

Что касается $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, то это предел суммы двух функций, одна из которых имеет предел $-\infty$, а другая – предел $+\infty$. Опять-таки нужно применить аналогичное преобразование:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x + \sqrt{x^2 - 2x}\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(x + \sqrt{x^2 - 2x}\right)\left(x - \sqrt{x^2 - 2x}\right)}{x - \sqrt{x^2 - 2x}} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{x - \sqrt{x^2 - 2x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{1 + \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{\sqrt{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \frac{2}{x}}} = \frac{2}{1 + \sqrt{1}} = 1$$

(здесь мы воспользовались тем, что $x = -\sqrt{x^2}$ при $x < 0$). График имеет горизонтальную асимптоту $y = 1$ при $x \to -\infty$. Графики функций из примеров 1 и 2 будут построены в §6.

§5. Производная. Касательная к графику функции

Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки x_0, а x – произвольная точка этой окрестности. Если отношение $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ имеет предел в точке x_0, то этот предел называется *производной* функции f в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

(здесь $\Delta x = x - x_0$).

Функция, имеющая производную в точке x_0, называется *дифференцируемой* в точке x_0. Элементарные функции дифференцируемы в каждой точке, в окрестности которой эти функции определены. При этом $\left(x^k\right)'=kx^{k-1}$ при $x>0$ (если k - целое число, то формула сохраняется при $x\neq 0$; если k - натуральное число, то формула сохраняется при всех x);

$$(\sin x)'=\cos x;\ (\cos x)'=-\sin x;\ (\mathrm{tg}x)'=\frac{1}{\cos^2 x};\ (\mathrm{ctg}x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Имеют место следующие формулы для вычисления производных суммы, произведения и частного двух функций:

$$(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x);$$

$$(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x);$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}.$$

Эти формулы справедливы в некоторой точке x, если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x; в формуле производной частного нужно требовать, чтобы $g(x)\neq 0$.

Производная постоянной функции равна 0, поэтому

$$(Cf(x))'=C'f(x)+Cf'(x)=Cf'(x),$$

т. е. постоянный множитель можно выносить за знак производной.

Очень важна формула производной сложной функции. Если функция f дифференцируема в точке x, а функция g - в точке $y = f(x)$, то сложная функция $g[f(x)]$ дифференцируема в точке x, причем

$$\{g[f(x)]\}' = g'[f(x)]f'(x).$$

При помощи этой формулы можно вычислять производные от сложных нагромождений элементарных функций, например, $\left(\sqrt[3]{\cos\left(1 - x^3 + \sin^2 x\right)}\right)' =$

$$= \frac{1}{3}\left(\cos\left(1 - x^3 + \sin^2 x\right)\right)^{-2/3} \cdot \left(\cos\left(1 - x^3 + \sin^2 x\right)\right)' =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\cos\left(1 - x^3 + \sin^2 x\right)\right)^{-2/3} \cdot \left(-\sin\left(1 - x^3 + \sin^2 x\right)\right)\times$$

$$\times\left(1 - x^3 + \sin^2 x\right)' = -\frac{1}{3}\cos\left(1 - x^3 + \sin^2 x\right)^{-2/3} \times$$

$$\times\sin\left(1 - x^3 + \sin^2 x\right)\cdot\left(-3x^2 + 2\sin x \cdot \cos x\right).$$

Функция, дифференцируемая в точке, обязана быть непрерывной в этой точке. Обратное утверждение неверно. Так, функция $y = |x|$ (график изображен на рис. 9) непрерывна в точке $x_0 = 0$, но не является дифференцируемой в ней. В самом деле, $\lim\limits_{x\to 0+0} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0+0} \frac{x}{x} = 1;$ $\lim\limits_{x\to 0-0} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0-0} \frac{-x}{x} = -1,$ и $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ не существует.

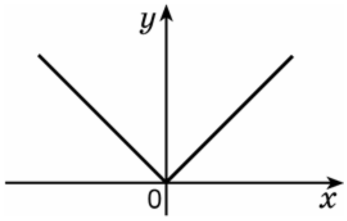


Рис. 9

Геометрически такая ситуация соответствует наличию у графика $y=|x|$ в точке $(0;0)$ характерного излома. Графики дифференцируемых функций не могут иметь таких изломов – они имеют касательные.

Касательной к графику дифференцируемой функции $f(x)$ в точке $A_0(x_0;f(x_0))$ называется прямая, проходящая через точку A_0, угловой коэффициент которой равен $f'(x_0)$. Уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке A_0 имеет вид

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

Пример 1. Провести касательную к графику функции $y=\sqrt[3]{x^2-1}$ в точке с абсциссой $x_0=3$.

Решение. $f(x_0)=2;\ f'(x)=\frac{1}{3}(x^2-1)^{-2/3}\cdot 2x;\ f'(x_0)=\frac{1}{2}$. Уравнение касательной $y=2+\frac{1}{2}(x-3)$, т. е. $y=\frac{x+1}{2}$.

Часто требуется провести касательную к графику функции через произвольную точку плоскости $(x_0;\ y_0)$. Такая задача может иметь два и более решений, а может вообще не иметь решений.

Пример 2. Провести касательную к параболе $y=x^2-4x+1$ через точку $(x_0;\ y_0)$. Исследовать решение.

Решение. Пусть искомая касательная касается параболы в точке $(\alpha;\ \alpha^2-4\alpha+1)$. Тогда, так как $(x^2-4x+1)'=2x-4$, то уравнение касательной имеет вид

$$y=(\alpha^2-4\alpha+1)+(2\alpha-4)(x-\alpha). \qquad (3)$$

Касательная должна проходить через точку $(x_0;\ y_0)$, откуда

$$y_0=(\alpha^2-4\alpha+1)+(2\alpha-4)(x_0-\alpha).$$

После преобразований получим квадратное уравнение для нахождения абсциссы точки касания α:

$$\alpha^2 - 2x_0\alpha + (y_0 + 4x_0 - 1) = 0. \qquad (4)$$

Если $D = x_0^2 - (y_0 + 4x_0 - 1) < 0,$ т. е. $y_0 > x_0^2 - 4x_0 + 1,$ то уравнение (4) не имеет решений. Если $D > 0,$ т. е. $y_0 < x_0^2 - 4x_0 + 1,$ то уравнение (4) имеет два решения: $\alpha = x_0 \pm \sqrt{x_0^2 - 4x_0 + 1 - y_0}$. Подставляя найденные α в (3), получим уравнения двух касательных, проходящих через точку $(x_0; y_0)$. Например, при $x_0 = 1, y_0 = -3$ имеем $\alpha = 2$ и $\alpha = 0,$ откуда из (3) получим уравнения двух касательных: $y = -3$ (горизонтальная касательная, касающаяся параболы в ее вершине) и $y = 1 - 4x$ (см. рис. 10). Наконец, если $D = 0,$ т. е. $y_0 = x_0^2 - 4x_0 + 1,$ то уравнение имеет одно решение $\alpha = x_0$. Геометрический смысл этого исследования очень прост. Если $y_0 > x_0^2 - 4x_0 + 1,$ т. е. точка $(x_0; y_0)$ лежит «выше» параболы, то через эту точку касательную провести нельзя. Если $y_0 < x_0^2 - 4x_0 + 1,$ т. е. точка $(x_0; y_0)$ лежит «ниже» параболы, то через эту точку можно провести две касательные к параболе. Наконец, если $y_0 = x_0^2 - 4x_0 + 1,$ т. е. точка $(x_0; y_0)$ лежит на параболе, то через нее можно провести единственную касательную к параболе, касающуюся параболы в самой точке $(x_0; y_0)$.

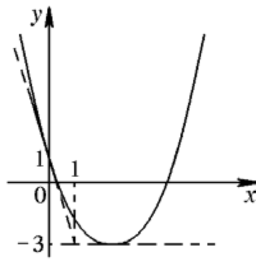


Рис. 10

§6. Применение производной к построению графиков функций

В §4 задания №3 были приведены определения монотонных функций, а также определения точек локального экстремума.

В курсах математического анализа доказываются следующие утверждения:

1. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a,b), причем $f'(x)>0$. Тогда $f(x)$ возрастает на (a,b).

2. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a,b), причем $f'(x)<0$. Тогда $f(x)$ убывает на (a,b).

3. (Необходимое условие экстремума). Пусть x_0 – точка локального экстремума функции $f(x)$. Тогда $f'(x_0)$ равна 0 или не существует вовсе.

Например, для функций $y=x^2$ и $y=|x|$ точка 0 – точка локального минимума. Производная функции $y=x^2$ в точке 0 равна 0; производная функции $y=|x|$ в точке 0 не существует.

Обращение производной в ноль (или отсутствие производной) не является достаточным условием локального экстремума. Так производная функция $y=x^3$ в точке 0 равна 0, а функция эта возрастает на всей числовой прямой $(-\infty;+\infty)$, и точка 0 не является точкой локального экс-
тремума. Сформулируем достаточные условия экстремума.

4. Пусть $f(x)$ непрерывна в точке x_0, причем при некотором $\varepsilon>0$ на интервале $(x_0-\varepsilon;\, x_0)$ существует положительная $f'(x)$, а на интервале $(x_0;\, x_0+\varepsilon)$ существует отрицательная $f'(x)$. Тогда x_0 - точка локального максимума функции $f(x)$.

5. Пусть $f(x)$ непрерывна в точке x_0, причем при некотором $\varepsilon>0$ на интервале $(x_0-\varepsilon;\, x_0)$ существует отрицательная $f'(x)$, а на интервале $(x_0;\, x_0+\varepsilon)$ существует положительная $f'(x)$. Тогда x_0 – точка локального минимума функции $f(x)$.

Образно говоря, если при прохождении точки производная меняет знак с «+» на «–», т. е. возрастание сменяется убыванием, то в этой точке локальный максимум. Если же при прохождении точки производная меняет знак с «–» на «+», т. е. убывание сменяется возрастанием, то в этой точке локальный минимум.

Отметим, что существование $f'(x_0)$ в утверждениях 4 и 5 не требуется. Так, функция $y = x^2$ и $y = |x|$ удовлетворяют в точке $x_0 = 0$ достаточному условию локального минимума (утверждение 5), но для первой из них $f'(0) = 0,$ а для второй $f'(0)$ не существует.

Исследуем на монотонность и экстремумы функцию $y = x^3 - 3x.$ Так как $y' = 3(x^2 - 1),$ то $y' < 0$ при $x \in (-1; 1);$ $y' > 0$ при $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty).$ Поэтому функция возрастает на интервалах $(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$ (на каждом из двух интервалов в отдельности, но не на их объединении!), убывает на интервале $(-1; 1).$ Далее, $y' = 0$ в точках $x = 1$ и $x = -1.$ Слева от точки $x = -1$ производная $y' > 0$, справа $y' < 0.$ Поэтому $x = -1$ - точка локального максимума. Слева от точки $x = 1$ производная $y' < 0,$ справа $y' > 0$. Поэтому $x = 1$ - точка локального минимума. Зная теперь, что функция $y = x^3 - 3x$ нечетна и обращается в ноль в точках $x = 0, x = \sqrt{3}$ и $x = -\sqrt{3},$ можно, вычислив $f(1) = -2$ и $f(-1) = 2,$ с достаточной точностью нарисовать график этой функции (рис. 11).

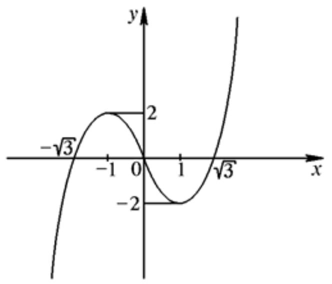


Рис. 11

На примере функции $y = x^3 - 3x$ хорошо видно, что локальные максимум и минимум не обязаны быть наибольшим и наименьшим значениями функции на всей области определения.

Приведем примеры построения более сложных графиков.

Пример 1. Построить график функции $y = \dfrac{(x-1)^3}{(x-2)^2}.$

Решение. Функция определена при $x \neq 2,$ обращается в нуль при $x = 1.$ Применяя метод интервалов, легко заметить, что $f(x) > 0$ при $x \in (1; 2) \cup (2; +\infty);$ $f(x) < 0$ при $x \in (-\infty; 1).$ График имеет вертикальную асимптоту $x = 2$ и наклонную асимптоту $y = x + 1$ при

$x \to \infty$ (см. пример 1 из §4). Вычислив значение $f(0) = -\dfrac{1}{4}$, мы можем нарисовать теперь эскиз графика (рис. 12).

Конечно, это только эскиз. Многое требует уточнений. Например, из геометрических соображений ясно, что на луче $(2; +\infty)$ функция имеет локальный минимум.

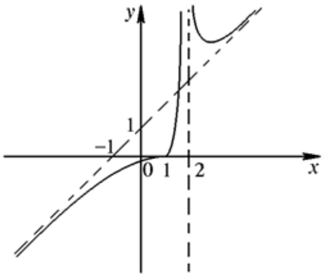


Рис. 12

Для определения координат этой точки вычислим производную данной функции. Имеем:

$$y' = \frac{(x-2)^2 3(x-1)^2 - (x-1)^3 2(x-2)}{(x-2)^4} =$$

$$= \frac{(x-1)^2\left[3(x-2) - 2(x-1)\right]}{(x-2)^3} = \frac{(x-1)^2(x-4)}{(x-2)^3}.$$

Применяя метод интервалов, построим таблицу изменения знака y' на всей области определения функции:

x	$(-\infty; 1)$	1	$(1; 2)$	2	$(2; 4)$	4	$(4; +\infty)$
y	+	0	+	///////	–	0	+

Отсюда видно, что функция возрастает на интервалах $(-\infty; 1)$, $(1; 2)$ и $(4; +\infty)$, убывает на интервале $(2; 4)$. При $x = 1$ производная обращается в нуль, но при прохождении этой точки знак производной не меняется. Возрастание сменяется опять-таки возрастанием, и точка $x = 1$ не является точкой локального экстремума. Таким образом, можно говорить о возрастании функции на всем интервале $(-\infty; 2)$.

Из таблицы ясно также, что точкой локального минимума является точка $x = 4$. Ордината этой точки равна $\dfrac{27}{4}$. Для общего вида графика важно также, что в точке $x = 1$ касательная к графику функции горизонтальна (на эскизе графика – рис. 12 – этого не видно). Используя полученные данные, можно окончательно вычертить график (рис. 13).

Отметим, что аппарат производной мы применили не сразу, а лишь после того, как были найдены область определения функции, интервалы знакопостоянства, точки пересечения с осями, асимптоты, построен черновой график. Таким образом, производная – это не орудие построения графика, а орудие шлифовки графика, предварительно построенного из более простых соображений.

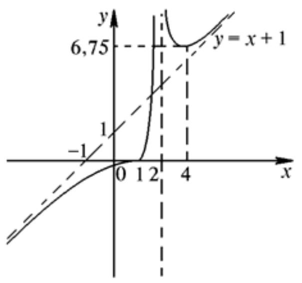


Рис. 13

Для более точного построения графика можно найти значения функции еще в нескольких точках. Но при выполнении данного задания это делать не обязательно. Нас интересует общий вид графика, а не построение его с очень большой точностью. Еще раз напомним, что «интересными» точками являются точки, в которых функция не является непрерывной, точки пересечения графика с осями и точки, где производная обращается в нуль или не существует, значения функции в других точках не нужны. При окончательном построении графика допускаются искажения масштаба там, где это не влияет на общий вид графика и делает рисунок более компактным (например, не будет большим грехом, если ордината точки локального минимума на рис. 13 будет фактически несколько меньше, чем 6,75).

Пример 2. Построить график функции $y = x + \sqrt{x^2 - 2x}$.

Решение. Функция определена при $x \in (-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$. Легко видеть, что $f(x) > 0$ при $x \geq 2$. Далее, $f(x) = 0$ при $x = 0$, а при всех $x < 0$ выполняется неравенство $f(x) > 0$. В самом деле, неравенство $x + \sqrt{x^2 - 2x} > 0$ равносильно неравенству $\sqrt{x^2 - 2x} > -x$; обе части последнего неравенства при $x < 0$ положительны, и после возведения их в квадрат получится равносильное неравенство $x^2 - 2x > x^2$, справедливое при $x < 0$.

При $x \to +\infty$ график имеет наклонную асимптоту $y = 2x - 1$, а при $x \to -\infty$ – горизонтальную асимптоту $y = 1$ (пример 2 из §4). Так как $y - x = \sqrt{x^2 - 2x} = \sqrt{(x-1)^2 - 1} < \sqrt{(x-1)^2} = |x - 1|$, то при $x \geq 2$ выполняется неравенство $y - x < x - 1$ (т. е. $y < 2x - 1$), а при $x \leq 0$ выполняется неравенство $y - x < 1 - x$, т. е. $y < 1$. Итак, график лежит ниже наклонных асимптот на соответствующих участках области определения функции. Такое исследование проводить не обязательно, но оно облегчает построение чернового графика. Теперь можно нарисовать эскиз графика (рис. 14).

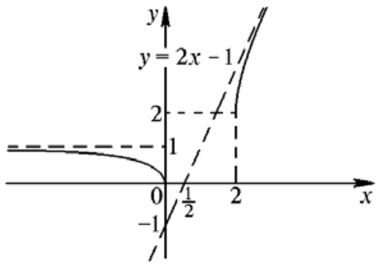


Рис. 14

Для окончательного построения графика вычислим производную. При $x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$ имеем:

$$f'(x) = 1 + \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x}}. \tag{5}$$

Ясно, что $f'(x) > 0$ при $x > 2$, и на $(2; +\infty)$ функция возрастает. При $x < 0$ перепишем равенство (5) в виде $f'(x) = \dfrac{f(x) - 1}{\sqrt{x^2 - 2x}}$.

Мы видели уже, что при $x < 0$ выполняется неравенство $f(x) < 1$, значит, $f'(x) < 0$, и на $(-\infty; 0)$ функция убывает. «Интересных» точек на $(-\infty; 0)$ и на $(2; +\infty)$ нет, поэтому строить таблицу изменения знака производной не имеет смысла.

В рассмотренном примере точки $x = 0$ и $x = 2$ являются граничными точками области определения, и важной характеристикой графика являются угловые коэффициенты касательных (односторонних) к графику в этих точках. Из (5) легко заметить, что $\lim\limits_{x \to 2+0} f'(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0-0} f'(x) = -\infty$. Поэтому в точках $x = 0$ и $x = 2$ график имеет односторонние вертикальные касательные (аккуратные доказательства соответствующих утверждений мы не приводим).

Так как все отмеченные свойства графика фактически отражены на рис. 14, то его можно считать окончательным вариантом графика.

Контрольные вопросы

1(3). (МГУ, 2003, филфак) Даны такие арифметическая прогрессия $\{a_n\}$ и геометрическая прогрессия $\{b_n\}$, что $a_1 = b_1$, $a_4 = b_3$, $a_2 a_3 - b_2^2 = 8$. Найдите разность арифметической прогрессии.

2(3). (МГУ, 2004, мехмат) Найдите все возможные значения суммы убывающей арифметической прогрессии $a_1 = \dfrac{6m - m^2 - 9}{6m - m^2}$, $a_2 = \dfrac{6m - m^2 - 12}{6m - m^2}, \ldots,\ a_n = \dfrac{-10}{6m - m^2}$, где m – некоторое целое число.

3(3). (МГУ, 2004, географ фак) Сколько цифр содержится в десятичной записи 99991-го члена последовательности a_n, если $a_1 = 0$, $a_{n+1} = 2a_n + 1024$, $\lg 2 = 0{,}301029...$?

4(3). (МГУ, 2004, соцфак) На факультете A отличники составляют 10% от общего количества студентов этого факультета, на факультете $Á - 20\%,$ а на факультете $B -$ лишь 4%. Найдите средний процент отличников по всем трем факультетам, если известно, что на факультете $Á$ учится на 50% больше студентов, чем на факультете A, а на факультете $B -$ вдвое меньше, чем на факультете A.

5(3). (МГУ, 2004, соцфак) Популярность продукта А за 2002 год выросла на 20%, в следующем году снизилась на 10%, а в конце 2004 г сравнялась с популярностью продукта $Á$. Популярность продукта $Á$ в 2002 году снизилась на 20%, затем на протяжении одного года не изменилась, а за 2004 г выросла на 40%. Как изменилась популярность продукта A за 2004 г, если в начале 2002 года она составляла $2/3$ от популярности продукта $Á$.

6(3). (МГУ, 2005,соцфак) Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия содержит член $b_n = \dfrac{1}{6}$. Отношение суммы членов прогрессии, стоящих перед b_n, к сумме членов, стоящих после b_n, равно 6. Найдите n, если сумма всей прогрессии равна $3/4$.

Вычислите следующие пределы:

7(2). $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{14n + 5(-1)^n}{15n - 3(-1)^n}$.

8(3). $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+5+9+...+(4n-3)}{5n^2-13}$.

9(4). $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 7}+\dfrac{1}{7\cdot 13}+...+\dfrac{1}{(6n-5)(6n+1)}\right)$.

10(3). $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^2+2^2+3^2+...+n^2}{1+2+...+n}-\dfrac{4n^2+2n-6}{6n+3}\right)$.

11(3). $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{(5+n)(n+4)}-\dfrac{(n+3)(n+4)}{n+5}\right)$.

Задачи

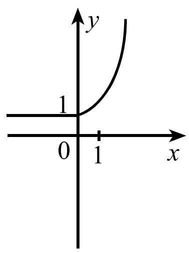
Найдите пределы функций (1-4)

1(2). $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{7x^3-\sqrt{3x}+12}{23x^3-14}$.

2(2). $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+15}{\sqrt{x^2+13x-12}}$.

3(2). $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{9x^2-13x+8}-3x$.

4(2). $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^2-3x-1}{3x^2-4x+1}$.



5(2). Укажите промежуток (или объединение промежутков, если их несколько), в каждой точке которого существует производная функции, график которой приведен на рис. $y=\left[\begin{array}{l}x^2+1, x\ge 0;\\ 1, x<0.\end{array}\right.$

6(2). Найдите сумму всех целых чисел, принадлежащих промежутку возрастания функции $y=-\dfrac{x^3}{3}+5x^2+12$.

7(2). Найдите сумму квадратов всех целых чисел, принадлежащих промежутку убывания функции $y=2x^3+3x^2-12x+5$.

8(2). На рисунке изображен график производной функции $y = f'(x)$, заданной на отрезке $[-1;7]$. Исследуйте функцию $y = f(x)$ на монотонность и в ответе укажите число промежутков возрастания.

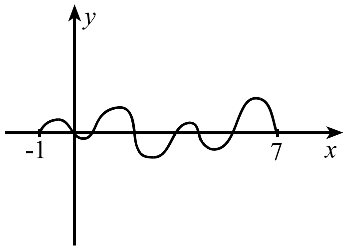


Рис. 2

9(2). Укажите наименьшее значение функции

$$4x^4 + 12x^3 + x^2 - 12x + 7.$$

10(2). Укажите наибольшее значение функции

$$-4x^4 + 12x^3 - 13x^2 + 6x + 8.$$

11(2). Укажите наименьшее значение функции

$$9x^4 + 12x^3 - 2x^2 - 4x - 4.$$

12(2). Укажите наибольшее значение функции

$$-x^4 + 8x^3 - 22x^2 + 24x + 4.$$

13(2). Материальная точка движется по прямой согласно уравнению $S(t) = t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 2t - 1$. Найдите ее скорость в момент $t = 3$.

14(2). Материальная точка движется прямолинейно по закону

$$x(t) = 2t^3 - \frac{5}{2}t^2 + 3t + 1.$$

В какой момент времени ускорение будет равно 19.

