

§4. Асимптоты

На рис. 3 изображен график функции $f(x) = \frac{1}{x}$. Как мы уже отметили, $\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$. Геометрически это соответствует тому, что при $x \rightarrow 0$ график неограниченно прибли-

жается к оси y (прямой $x = 0$); при $x \rightarrow \infty$ график неограниченно приближается к оси x (прямой $y = 0$). В этом случае говорят, что график имеет вертикальную асимптоту $x = 0$ и горизонтальную асимптоту $y = 0$.

Бывают еще и наклонные асимптоты. Многим знаком график функции $y = x + \frac{1}{x}$

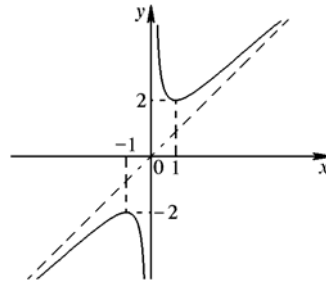


Рис. 5

(рис. 5). Так как $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$, то

график имеет вертикальную асимптоту $x = 0$. При $x \rightarrow \infty$ горизонтальной асимптоты нет: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, и график неограниченно при-

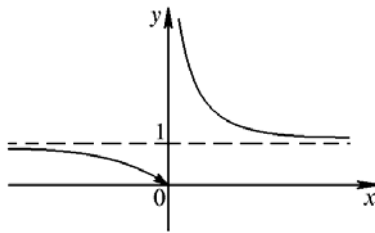


Рис. 6

ближается к прямой $y = x$ ($\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$). Прямая $y = x$ является наклонной асимптотой графика $y = x + \frac{1}{x}$.

Дадим теперь определения всех типов асимптот.

I. Прямая $x = a$ называется *вертикальной асимптотой* графика $y = f(x)$, если $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$ или $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty$. Так, для функций $f(x) = \frac{1}{x}$ (рис. 3) и $f(x) = x + \frac{1}{x}$ (рис.5) $\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = \infty$ и $\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = \infty$; каждый из этих графиков имеет вертикальную асимптоту $x = 0$. А вот график $y = 2^{1/x}$ (рис. 6) имеет одностороннюю вертикальную асимптоту $x = 0$ ($\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = 0$).

II. Прямая $y = b$ называется *горизонтальной асимптотой* графика $y = f(x)$, если $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ или $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$. Так, для функции

$f(x) = \frac{1}{x}$ (рис. 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ (асимптота $y = 0$). Для графика на рис. 6 горизонтальной асимптотой является прямая $y = 1$. А вот график $y = \arctg x$ (рис. 7) имеет горизонтальную асимптоту $y = \frac{\pi}{2}$ при $x \rightarrow +\infty$ и горизонтальную асимптоту $y = -\frac{\pi}{2}$ при $x \rightarrow -\infty$.

III. Прямая $y = kx + b$ называется *наклонной асимптотой* графика $y = f(x)$, если $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx - b) = 0$ или $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx - b) = 0$.

Горизонтальные асимптоты являются частным случаем наклонных

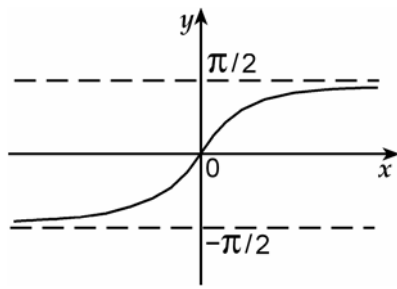


Рис. 7

(при $k = 0$). График $y = x + \frac{1}{x}$ (рис.5) имеет двустороннюю наклонную асимптоту $y = x$ ($\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = 0$).

График $y = x + \arctg x$ имеет односторонние наклонные асимптоты:

$$y = x + \frac{\pi}{2}$$

при $x \rightarrow +\infty$ и $y = x - \frac{\pi}{2}$ при $x \rightarrow -\infty$

(рис. 8).

Наклонные асимптоты при $k \neq 0$ могут иметь место лишь в том случае, когда $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$ или $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$.

Пусть прямая $y = kx + b$ - двусторонняя наклонная асимптота графика $y = f(x)$. Заметим, что $\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - kx - b}{x} + k + \frac{b}{x}$.

Так как $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx - b) = 0$ и $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$, то $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = k$. Ясно, что $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = b$. Итак,

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}; \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx). \quad (2)$$

Обратно, если существуют числа k и b , удовлетворяющие условию (2), то $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx - b) = 0$, т. е. $y = kx + b$ - наклонная асимптота. В случае односторонних наклонных асимптот k и b ищутся по формулам (2), где ∞ заменяется на $+\infty$ или $-\infty$.

Отметим, что существование конечного предела $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ еще не

означает наличия асимптоты. Так, для функции

$$y = \sqrt{x} : k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty.$$

Поэтому график не имеет асимптоты при $x \rightarrow +\infty$.

Пример 1. Найти асимптоты гра-

$$\text{фика } y = \frac{(x-1)^3}{(x-2)^2}.$$

Решение. Ясно, что $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \infty$,

поэтому график имеет вертикальную асимптоту $x = 2$. Далее, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$. Поэтому ищем

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)^3}{x(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^3 - 4x^2 + 4x} = 1;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{(x-1)^3}{(x-2)^2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x - 1}{x^2 - 4x + 4} = 1.$$

График имеет двустороннюю наклонную асимптоту $y = x + 1$.

Пример 2. Найти асимптоты графика $y = x + \sqrt{x^2 - 2x}$.

Решение. Функция определена при $x^2 - 2x \geq 0$, т. е. при $x \in (-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$. Так как в любой точке области определения функция имеет конечный предел, то вертикальных асимптот график не имеет. Исследуем наличие асимптот при $x \rightarrow \infty$ (горизонтальных или наклонных).

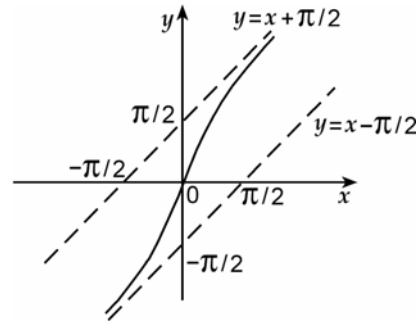


Рис. 8

Так как $f(x) \geq x$ при $x \geq 2$, то $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Поэтому ищем

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{2}{x}} \right) = 2$$

(здесь использовано то, что $x = \sqrt{x^2}$ при $x \geq 0$). Далее,

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 2x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 2x} - x)(\sqrt{x^2 - 2x} + x)}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{\sqrt{1 - \frac{2}{x}} + 1} = \frac{-2}{\sqrt{1} + 1} = -1. \end{aligned}$$

График имеет наклонную асимптоту $y = 2x - 1$ при $x \rightarrow +\infty$. Обратим внимание на то, что при вычислении $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 2x} - x)$ мы столкнулись с разностью двух функций, каждая из которых имеет предел $+\infty$. Как говорят, имеет место неопределенность $\infty - \infty$. Непосредственно такой предел вычислить нельзя. Снова приходится прибегнуть к умножению и делению на «сопряженное» выражение (см. также примеры 6 и 7 из §3).

Что касается $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, то это предел суммы двух функций, одна из которых имеет предел $-\infty$, а другая – предел $+\infty$. Опять-таки нужно применить аналогичное преобразование:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 - 2x}) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x + \sqrt{x^2 - 2x})(x - \sqrt{x^2 - 2x})}{x - \sqrt{x^2 - 2x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x - \sqrt{x^2 - 2x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{1 + \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \frac{2}{x}}} = \frac{2}{1 + \sqrt{1}} = 1 \end{aligned}$$

(здесь мы воспользовались тем, что $x = -\sqrt{x^2}$ при $x < 0$). График имеет горизонтальную асимптоту $y = 1$ при $x \rightarrow -\infty$. Графики функций из примеров 1 и 2 будут построены в §6.