§2. Понятие о пределе последовательности

В курсе алгебры и начал анализа 10 – 11 классов важную роль играет понятие производной, к которому мы придем в §5 настоящего задания. Производная определяется при помощи понятия предела функции, которое в обязательной школьной программе фактически отсутствует (не определяется аккуратно). В §§2 и 3 мы приведем схему построения теории пределов последовательностей и функций (почти без доказательств).

Интервал $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$, называется ε – эпсилон-окрестность точки a. Предел числовой последовательности можно определить следующим образом.

Число a называется *пределом* последовательности x_n, если в любой ε – окрестности точки a лежат все члены последовательности x_n, за исключением, быть может, конечного их числа.

Иначе говоря, число a является пределом последовательности x_n, если вне любой окрестности точки a находится не более конечного числа членов x_n. Отсюда легко заметить, что изменение конечного числа членов последовательности не влияет ни на факт существования предела, ни на величину последнего. При этом несущественно также, определены ли члены последовательности при всех $n \geq 1$ или же начиная с некоторого номера n_0.

Тот факт, что последовательность x_n имеет предел a, записывается символически так:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ (или } x_n \to a \text{ при } n \to \infty).$$

Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*; последовательность, не имеющая конечного предела, называется *расходящейся*.

Пример 1. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$

Доказательство. Точка $x_n = \frac{1}{n}$ принадлежит ε – окрестности точки $a = 0$ в том и только в том случае, когда $-\varepsilon < \frac{1}{n} < \varepsilon$, т. е. при $n > \frac{1}{\varepsilon}$ (следовательно, для всех n, кроме конечного числа значений). Это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$

Пример 2. («Теорема о двух милиционерах»).
Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$, и при всех n выполняются неравенства $x_n \leq z_n \leq y_n$, то и $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

Доказательство. (См. рис. 1). Рассмотрим произвольную ε – окрестность точки a. По определению предела, эта окрестность содержит все члены x_n, кроме конечного числа номеров. Рассмотрим те номера n, при которых и x_n, и y_n принадлежат данной окрестности. При этих n члены z_n также принадлежат данной окрестности. Это будут все z_n, кроме конечного их числа. По определению предела это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

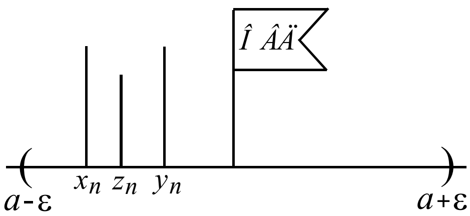

Рис. 1

При вычислении пределов на практике редко пользуются определением предела. Обычно применяют некоторые стандартные (доказанные в теоретических курсах) предельные равенства, например:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^a} = 0, \text{ если } a > 0; \lim_{n\to\infty} q^n = 0, \text{ если } |q| < 1 \qquad (1)$$

и т. д., а также различные теоремы о пределах. Сформулируем теоремы об арифметических операциях с пределами.

Если последовательности x_n и y_n сходятся, то сходятся и последовательности $x_n + y_n$, $x_n y_n$, $\dfrac{x_n}{y_n}$ (в последнем случае надо требовать, чтобы $y_n \neq 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$). При этом $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \lim_{n\to\infty} y_n; \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}.$$

Пример 3. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2 - 3n + 2}{n^2 + 2}$.

Решение. Имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2 - 3n + 2}{n^2 + 2} = \lim_{n\to\infty}\frac{2 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}}{1 + \frac{2}{n^2}} = \frac{2 - 3\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} + 2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{1 + 2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}} = \frac{2 - 3\cdot 0 + 2\cdot 0}{1 + 2\cdot 0} = 2.$$

Пример 4. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1,$ если $a>1.$

Доказательство. Обозначим $x_n=\sqrt[n]{a}-1.$ Ясно, что $x_n>0$ при $a>1,\ n=1,2,3,\ldots.$ Тогда $a=\left(1+x_n\right)^n\geq 1+nx_n>nx_n$ (для доказательства можно применить неравенство Бернулли $\left(1+a\right)^n\geq 1+na,$ справедливое при $a>-1,\ n=1,2,3,\ldots,$ которое легко доказывается методом математической индукции). Значит $0<x_n<\dfrac{a}{n}.$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a}{n}=a\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0,$ то, по теореме о двух милиционерах, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0,$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+x_n\right)=1+\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1.$

Пример 5. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n+5^n}.$

Решение. Пусть $x_n=\sqrt[n]{3^n+5^n}.$ Тогда $x_n>\sqrt[n]{5^n};$ с другой стороны, $x_n<\sqrt[n]{2\cdot 5^n}=5\cdot\sqrt[n]{2}.$ Итак, $5<x_n<5\cdot\sqrt[n]{2}.$ Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\left(5\cdot\sqrt[n]{2}\right)=5\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=5,$ то, по теореме о двух милиционерах, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=5.$

Геометрическая прогрессия x_n называется *бесконечно убывающей*, если $|q|<1$ (q – знаменатель прогрессии). *Суммой* бесконечно убывающей геометрической прогрессии называется $\lim\limits_{n\to\infty}S_n,$ где S_n – сумма ее первых n членов. Известно, что $S_n=x_1\dfrac{q^n-1}{q-1}=$ $=\dfrac{x_1}{q-1}q^n+\dfrac{x_1}{1-q};$ поэтому сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна

$$S=\frac{x_1}{q-1}\lim_{n\to\infty}q^n+\frac{x_1}{1-q}=\frac{x_1}{q-1}\cdot 0+\frac{x_1}{1-q}=\frac{x_1}{1-q}.$$

Пример 6. Последовательность x_n задана рекуррентно: $x_1 = a$; $x_2 = b$; $x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_{n-2})$, $n = 3,4,\ldots$. Доказать, что последовательность сходится и найти ее предел.

Решение. Имеем: $x_n - x_{n-1} = \frac{x_{n-2} - x_{n-1}}{2} = -\frac{1}{2}(x_{n-1} - x_{n-2})$. Подставляя в полученное равенство вместо n номера $n-1, n-2, \ldots$, получим: $x_n - x_{n-1} = -\frac{1}{2}(x_{n-1} - x_{n-2}) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 (x_{n-2} - x_{n-3}) = \ldots =$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}(x_2 - x_1) = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}(b-a).$$

Поэтому $x_n = a + (x_n - a) = a + (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \ldots +$

$$+ (x_2 - x_1) = a + (b-a)\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-3} + \ldots + 1\right).$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + \ldots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right) = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$

(сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии),

то существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a + (b-a)\cdot\frac{2}{3} = \frac{a+2b}{3}$.

Последовательность, предел которой равен нулю, называется *бесконечно малой*. Последовательность x_n называется *бесконечно большой*, если последовательность $y_n = \frac{1}{x_n}$ является бесконечно малой. Для бесконечно больших последовательностей применяется запись $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Говорят, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, если x_n – бесконечно большая и $x_n > 0$ (кроме, быть может, конечного числа членов).

Говорят, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, если x_n – бесконечно большая и $x_n < 0$ (кроме, быть может, конечного числа членов).

Так как при любых α и любых $q > 1$ выполняются неравенства $n^\alpha > 0$ и $q^n > 0$, $n = 1,2,3, \ldots$, то из (1) следует, что при $\alpha > 0$ и $q > 1$ $\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha = +\infty$; $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty$. Если же $q < -1$, то последовательность q^n бесконечно большая, но знак ее все время меняется, поэтому неверно ни то, что $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty$, ни то, что $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = -\infty$.