§1. Бесконечные последовательности. Формула общего члена

Пусть каждому натуральному числу n поставлено в соответствие некоторое число x. Это значит, что на множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел задана числовая функция $x = x(n)$; эта функция называется *бесконечной числовой последовательностью* (или просто *последовательностью*). Аргумент n этой функции записывается в виде индекса, т. е. вместо записи $x(n)$ употребляется запись x_n. Приведем примеры.

(I) 1; 1; 1; … (т. е. $x_n = 1$ для всех n);

(II) 1; 2; 4; 8; … (т. е. $x_n = 2^{n-1}$);

(III) последовательность, n-й член которой равен n-му знаку после запятой в десятичной записи числа $\frac{8}{33}$;

(IV) то же для числа π;

(V) последовательность, n-й член которой равен количеству простых чисел, не превосходящих n;

(VI) последовательность, n-й член которой равен площади правильного треугольника со стороной n.

Последовательность (II) удобно записать так: $x_n = 2^n$, $n = 0,1,2,3,\ldots$. Часто бывает удобно в качестве области определения последовательности рассматривать множество всех целых чисел n таких, что $n \ge n_0$, где n_0 – фиксированное целое число (при $n_0 = 1$ получаем множество $\mathbb{N}$). Например, последовательность $x_n = \frac{1}{n-1}$ имеет смысл рассматривать при $n \ge 2$, а последовательность $x_n = \sqrt{n+2}$ можно рассматривать при $n \ge -2$. Легко убедиться, что в примере (III) $x_1 = 2,\ x_2 = 4,\ x_3 = 2,\ x_4 = 4$ и т. д., т. е. $x_n = 3 + (-1)^n,\ n \ge 1$. Ясно также, что в примере (VI) $x_n = \frac{\sqrt{3}}{4} n^2$. А вот явные формулы для общего члена последовательностей (IV) и (V) написать невозможно. Тем не менее, многие свойства этих последовательностей установлены и без формул. Таким образом, явное задание формулы общего члена не является необходимым для изучения свойств последовательности.

И все же, при любом задании последовательности в первую очередь возникает вопрос, нельзя ли выписать явно формулу общего члена. Особенно часто такой вопрос возникает, когда последовательность задана рекуррентно, т. е. даны несколько первых членов последовательности и формула, выражающая последующие члены через предыдущие. Рассмотрим примеры таких последовательностей.

Пример 1. Числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом d, называется *арифметической прогрессией.* Число d называется *разностью* арифметической прогрессии.

Из определения следует, что $x_{n+1} = x_n + d$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Таким образом, определение арифметической прогрессии задает эту последовательность рекуррентно. Формула общего члена арифметической прогрессии имеет вид:

$$x_n = x_1 + d(n-1), \; n = 1, 2, 3 \dots$$

Пример 2. Числовая последовательность, первый член которой отличен от нуля, а каждый член, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же число q, не равное нулю, называется *геометрической прогрессией.* Число q называется *знаменателем* прогрессии.

Из определения следует, что $x_{n+1} = x_n q$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Таким образом, определение геометрической прогрессии задает эту последовательность рекуррентно. Формула общего члена геометрической прогрессии имеет вид:

$$x_n = x_1 q^{n-1}, \; n = 1, 2, 3, \dots$$

Пример 3. Найти формулу общего члена последовательности, заданной рекуррентно: $x_1 = 1$; $x_{n+1} = 3x_n + 1$, $n = 1, 2, 3, \dots$.

Решение. Рассмотрим вспомогательную последовательность $y_n = x_n + a$, где число a подбирается так, чтобы последовательность y_n была геометрической прогрессией. Подставляя $x_n = y_n - a$ и $x_{n+1} = y_{n+1} - a$ в рекуррентное соотношение, имеем:

$$y_{n+1} - a = 3(y_n - a) + 1, \text{ т. е. } y_{n+1} = 3y_n + (1 - 2a).$$

Последовательность y_n будет геометрической прогрессией, если $1-2a=0$, т.е. $a=\frac{1}{2}$. Так как $y_1=x_1+a=\frac{3}{2}$, то формула общего члена геометрической прогрессии y_n запишется так: $y_n=\frac{3}{2}3^{n-1}$ $\left(y_1=\frac{3}{2};\ q=3\right)$, т. е. $y_n=\frac{1}{2}3^n$. Тогда $x_n=y_n-a=\frac{3^n-1}{2}$.

Пример 4. Последовательность Фибоначчи задается рекуррентно: $x_1=x_2=1;\ x_{n+2}=x_{n+1}+x_n,\ n=1,2,3,\ldots$. Можно доказать, что формула общего члена этой последовательности имеет вид

$$x_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Рекуррентное соотношение может не задавать последовательности. Например, если $x_1=\frac{2}{3},\ x_{n+1}=\frac{1-x_n}{x_n},\ n=1,2,3,\ldots,$ то $x_2=\frac{1}{2},\ x_3=1,$ $x_4=0,$ и все члены, начиная с пятого, не определены.