Федеральное агентство по образованию
Федеральная заочная физико-техническая школа
при Московском физико – техническом институте
(государственном университете)

МАТЕМАТИКА

Планиметрия (часть II)

Задание №6 для 9-х классов

(2005-2006 учебный год)

г. Долгопрудный, 2006

Составитель: Т.С. Пиголкина, доцент кафедры высшей математики МФТИ.

математика: задание №6 для 9-х классов (2005-2006 учебный год). - М.: МФТИ, 2005, 24с.

Дата отправления заданий по физике и математике – 28 апреля 2006г.

Дорогие ребята!

Подходит к концу учебный год – Вы получили последнее задание. Многие из Вас успешно справились с программой, но есть и задолжники. Настоятельно советуем Вам поторопиться с выполнением заданий ФЗФТШ, т.к. последний срок присылки долгов ***– 15 мая 2006г.***

Составитель:

Пиголкина Татьяна Сергеевна

Изд. лиц. №040060 от 21.08.96г. Подписано 20.03.06
Формат 60х90 1/16. Бумага типографская. Печать офсетная. Усл. печ. л. 1,5
Уч.-изд. л. 1,33. Тираж 1700. Заказ №19-з.

Федеральная заочная физико-техническая школа
Московский физико-технический институт
(государственный университет)
«ФИЗТЕХ-ПОЛИГРАФ»

141700, Москов. обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
ФЗФТШ при МФТИ, тел/факс (495) 408-5145 – **заочное отделение**
тел./факс (495) 485-4227 – **очно-заочное отделение**
тел.409-9583 – **очное отделение**

E.mail: zftsh@pop3.mipt.ru

Наш сайт: www.school.mipt.ru

Вторая часть по планиметрии содержит три параграфа. В § 1 подробно обсуждаются свойства касательных, хорд и секущих, доказывается теорема “о касательной и секущей”. § 2 посвящен вписанным и описанным четырехугольникам, теме, которая практически не рассматривается в учебнике. В § 3 рассматриваются задачи на построение с помощью циркуля и линейки. Этой теме, к сожалению, в школе также мало уделяется внимания, хотя именно в задачах на построение лучше всего усваивается и закрепляется теоретический материал.

В решениях задач § 2 будут применяться теоремы косинусов и синусов, более подробно эти теоремы будут обсуждаться в задании “Планиметрия”, часть III в 10 классе ФЗТШ. Здесь мы только напомним эти теоремы. Для произвольного треугольника, длины сторон которого обозначены a, b, c, а величины противолежащих углов α, β, γ, справедливы две теоремы, утверждения которых можно кратко записать так:

теорема косинусов: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

теорема синусов: $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$.

Напомним также, что в учебнике доказано, что

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R,$$

где R – радиус окружности, описанной около этого треугольника.

§ 1. Свойства касательных, хорд и секущих

Пусть к окружности с центром в точке O проведены две касательные AM и AN, точки M и N лежат на окружности (рис. 1).

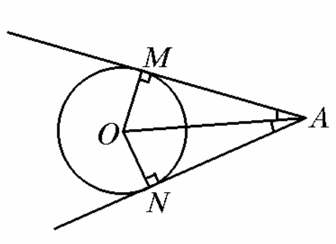


Рис. 1

По определению касательной $OM \perp AM$ и $ON \perp AN$. В прямоугольных треугольниках AOM и AON гипотенуза AO общая, катеты OM и ON равны, значит, $\Delta AOM = \Delta AON$. Из равенства этих треугольников следует $AM = AN$ и $\angle MAO = \angle NAO$. Таким образом, если из точки к окружности проведены две касательные, то:

1°**. отрезки касательных от этой точки до точек касания равны;**

2°**. прямая, проходящая через центр окружности и заданную точку, делит угол между касательными пополам.**

Используя свойство 1, легко решим следующие две задачи. (В решении используется тот факт, что в каждый треугольник можно вписать окружность.)

Задача 1. На основании AC равнобедренного треугольника ABC расположена точка D, при этом $DA=a$, $DC=b$ (рис. 2). Окружности, вписанные в треугольники ABD и DBC, касаются прямой BD в точках M и N соответственно. Найти отрезок MN.

$\triangleright$ Пусть $a>b$. Обозначим $x=MN$,

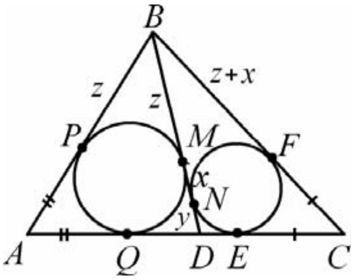


Рис. 2

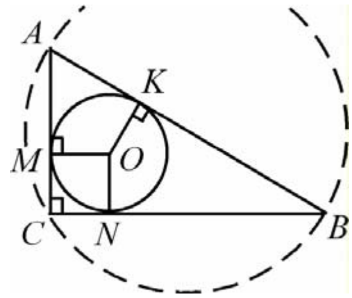


Рис. 3

$y=ND$, $z=BM$. По свойству касательных $DE=y$, $QD=x+y$, $AQ=AP=a-(x+y)$, $CE=CF=b-y$, $BP=z$ и $BF=z+x$. Выразим боковые стороны: $AB=z+a-x-y$, $BC=z+x+b-y$. По условию $AB=BC$, поэтому $z+a-x-y=z+x+b-y$. Отсюда находим $x=(a-b)/2$. Итак, $MN=(a-b)/2$. Если $a<b$, то $MN=(b-a)/2$. Итак, $MN=\dfrac{1}{2}|a-b|$. $\triangleleft$

Задача 2. Доказать, что в прямоугольном треугольнике сумма катетов равна удвоенной сумме радиусов вписанной и описанной окружностей, т.е. $a+b=2R+2r$.

$\triangleright$ Пусть M, N и K – точки касания окружностью сторон прямоугольного треугольника ABC (рис. 3), $AC=b$, $BC=a$, r – радиус вписанной окружности, R – радиус описанной окружности. Вспомним, что гипотенуза есть диаметр описанной окружности: $AB = 2R$. Далее, $OM \perp AC$, $BC \perp AC$, значит, $OM \parallel BC$, аналогично $ON \perp BC$, $AC \perp BC$, значит, $ON \parallel AC$. Четырехугольник $MONC$ по определению есть квадрат, все его стороны равны r, поэтому $AM = b - r$ и $BN = a - r$.

По свойству касательных $AK = AM$ и $BK = BN$, поэтому $AB = AK + KB = a + b - 2r$, а т.к. $AB = 2R$, то получаем $a + b = 2R + 2r$. ◁

Напомним, что градусная мера вписанного угла равна половине градусной меры дуги, на которую он опирается.

Теорема 1. Мера угла между касательной и хордой, имеющими общую точку на окружности, равна половине градусной меры дуги, заключенной между его сторонами.

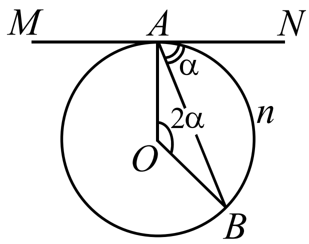


Рис. 4

▷ Пусть O – центр окружности, AN – касательная (рис. 4). Угол между касательной AN и хордой AB обозначим α. Соединим точки A и B с центром окружности. Так как $OA \perp AN$, $OA = OB$, то $\angle OAB = \angle OBA = 90° - \alpha$. Сумма углов треугольника равна $180°$, поэтому $\angle AOB = 2\alpha$. Таким образом, градусная мера угла BAN между касательной и хордой равна половине градусной меры дуги AnB, которая заключена между его сторонами. (Аналогичные рассуждения можно провести и для угла MAB.) ◁

Задача 3. Через точку B окружности проведена касательная. Концы хорды AC отстоят от этой касательной на расстоянии $4 см$ и $9 см$. Найти расстояние от точки B до хорды AC.

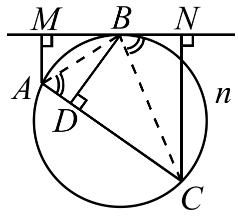


Рис. 5

▷ Пусть $AM \perp MN$, $CN \perp MN$, $BD \perp AC$ (рис. 5). Проведем хорды AB и BC.

По условию $AM = 4$ см и $CN = 9$ см. По теореме 1 угол между касательной BN и хордой BC равен половине градусной меры дуги BnC. Вписанный угол BAC опирается на эту же дугу и также равен половине ее градусной меры, поэтому $\angle NBC = \angle BAC$.

Прямоугольные треугольники NBC и DAB имеют по равному острому углу, следовательно, они подобны и

$$CN : BD = BC : AB \qquad (1)$$

Аналогично, из равенства углов MBA и BCA следует подобие треугольников MBA и DCB и соотношение

$$AM : BD = AB : BC \qquad (2)$$

Перемножим правые и левые части равенств (1) и (2), получим $CN \cdot AM / BD^2 = 1$. Отсюда находим $BD = \sqrt{CN \cdot AM} = 6$ см. ◁

Докажем теорему, обычно называемую “теоремой о касательной и секущей”.

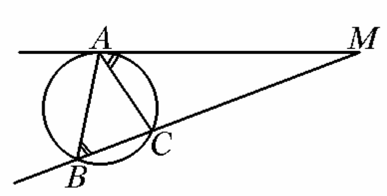


Рис. 6

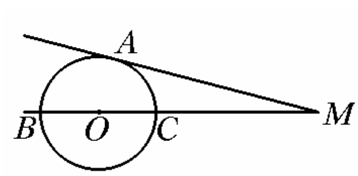


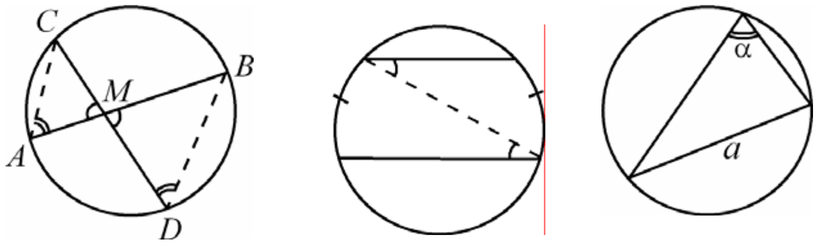
Рис. 7

Теорема 2. Пусть из одной точки M к окружности проведены касательная MA и секущая MB, пересекающая окружность в точке C (рис. 6). Тогда справедливо равенство $MA^2 = MB \cdot MC$, т.е. если из точки M к окружности проведены касательная и секущая, то квадрат отрезка касательной от точки M до точки касания равен произведению длин отрезков секущей от точки M до точек ее пересечения с окружностью.

▷ Проведём хорду AC. Угол MAC между касательной и хордой равен вписанному углу ABC, оба измеряются половиной градусной меры дуги AC. В треугольниках MAC и MBA равны углы MAC и MBA, а угол при вершине M общий. Эти треугольники подобны, из подобия имеем $MA/MB = MC/MA$, откуда следует $MA^2 = MB \cdot MC$. ◁

Задача 4. Радиус окружности равен r. Из точки M проведены касательная MA и секущая MB, проходящая через центр окружности (рис. 7). Найти расстояние между точкой M и центром окружности, если $MB = 2MA$.

$\triangleright$ Обозначим искомое расстояние x: $x = MO$, тогда $MB = x + r$, $MC = x - r$ и по условию $MA = MB/2 = (x+r)/2$. По теореме о касательной и секущей $(x+r)^2/4 = (x+r)(x-r)$, откуда, сокращая на $(x+r)$, получаем $(x+r)/4 = (x-r)$. Легко находим $x = 5r/3$. $\triangleleft$



а) б) в)

Рис. 8

Теорема 3. Если две хорды окружности пересекаются, то произведение длин отрезков одной хорды равно произведению длин отрезков другой хорды, т.е. если хорды AB и CD пересекаются в точке M (рис. 8), то $AM \cdot MB = CM \cdot MD$.

$\triangleright$ Рассмотрим треугольники ACM и DBM. Углы CAB и CDB вписанные, опирающиеся на одну дугу, они равны. Углы при вершине M равны, как вертикальные, следовательно, эти треугольники подобны. Из подобия следует $CM / MB = AM / MD$ или

$$AM \cdot MB = CM \cdot MD. \triangleleft$$

Напомним также следующие свойства хорд окружности (доказательство проведите самостоятельно).

1°. **Диаметр, перпендикулярный хорде, делит ее пополам. Обратно: диаметр, проходящий через середину хорды (не являющейся диаметром), перпендикулярен ей.**

2°. **Равные хорды окружности находятся на равном расстоянии от центра окружности. Обратно: на равном расстоянии от центра окружности находятся равные хорды.**

3°**. Дуги окружности, заключенные между параллельными хордами, равны (рис. 8б).**

4°**. Если в окружности радиуса R вписанный угол, опирающийся на хорду длины a, равен α, то $a = 2R\sin\alpha$ (рис. 8в).**

Задача 5. В окружности проведены три равные хорды $AB = BC = CD = a$. Хорды AB и CD пересекаются в точке K, угол $BKC = 120^\circ$ (рис. 9). Найти радиус окружности.

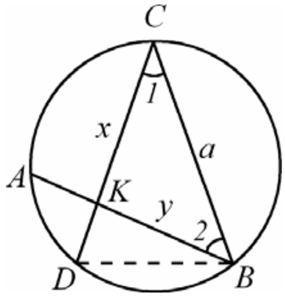
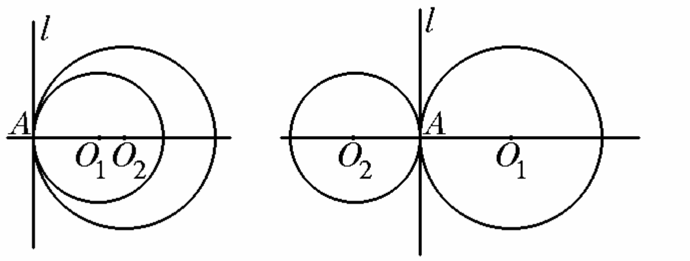


Рис. 9

▷ Обозначим $CK = x$, $BK = y$, тогда $AK = a - y$, $DK = a - x$. По теореме 3 имеем: $CK \cdot DK = AK \cdot BK$, т.е. $x(a - x) = y(a - y)$. Это равенство преобразуем к виду $(x - y)(a - x - y) = 0$. Так как $a \neq x + y$ (в этом случае треугольник BKC не существует), то $x = y$. Следовательно, треугольник BKC – равнобедренный и $\angle 1 = \angle 2 = 30^\circ$. Из теоремы синусов следует, что $R = BD / 2\sin(\angle 1)$. BD найдем из ΔBCD по теореме косинусов: $BD = \sqrt{a^2 + a^2 - 2a^2\cos 30^\circ} = a\sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

Таким образом, $R = BD / 2\sin 30^\circ = a\sqrt{2 - \sqrt{3}}$. ◁



а) б)

Рис. 10

В заключении параграфа рассмотрим задачи с двумя касающимися окружностями. Две окружности, имеющие общую точку и общую касательную в этой точке, называются касающимися. Если окружности расположены по одну сторону от общей касательной, они называются касающимися внутренне (рис. 10а), а если расположены по разные стороны от касательной, то они называются касающимися внешне (рис. 10б).

Если O_1 и O_2 – центры окружностей, то по определению касательной $AO_1 \perp l$, $AO_2 \perp l$, следовательно, в обоих случаях *общая точка касания лежит на линии центров.*

Задача 6. Две окружности радиусов R_1 и R_2 ($R_1 > R_2$) внутренне касаются в точке A. Через точку B, лежащую на большей окружности, проведена прямая, касающаяся меньшей окружности в точке C (рис. 11). Найти AB, если $BC = a$.

▷ Пусть O_1 и O_2 – центры большей и меньшей окружностей, D – точка пересечения хорды AB с меньшей окружностью. Если $O_1N \perp AB$ и $O_2M \perp AB$, то $AN = AB/2$ и $AM = AD/2$ (т.к. радиус, перпендикулярный хорде, делит ее пополам). Из подобия треугольников AO_2M и AO_1N следует $AN : AM = AO_1 : AO_2$ и, значит, $AB : AD = R_1 : R_2$. По теореме о касательной и секущей имеем:

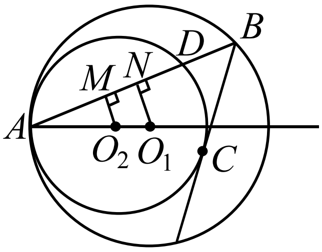


Рис. 11

$$BC^2 = AB \cdot BD = AB(AB - AD) = AB^2\left(1 - \frac{AD}{AB}\right),$$

т.е. $a^2 = AB^2\left(1 - \dfrac{R_2}{R_1}\right)$.

Итак, $AB = a\sqrt{\dfrac{R_1}{R_1 - R_2}}$. ◁

Задача 7. Две окружности радиусов R_1 и R_2 внешне касаются в точке A (рис. 12). Их общая внешняя касательная касается большей окружности в точке B и меньшей – в точке C. Найти радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

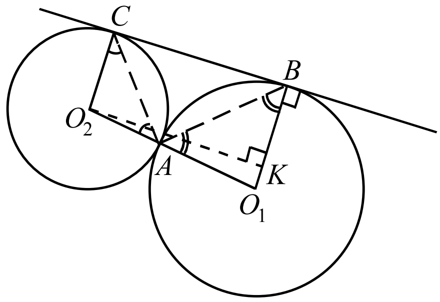


Рис. 12

$\triangleright$ Соединим центры O_1 и O_2 с точками B и C. По определению касательной, $O_1B \perp BC$ и $O_2C \perp BC$. Следовательно, $O_1B \| O_2C$ и $\angle BO_1O_2 + \angle CO_2O_1 = 180°$. Так как $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle BO_1A$ и $\angle ACB = \frac{1}{2}\angle CO_2A$, то $\angle ABC + \angle ACB = 90°$. Отсюда следует следует, что $\angle BAC = 90°$, и поэтому радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника ABC, равен половине гипотенузы BC.

Найдем BC. Пусть $O_2K \perp O_1B$, тогда $KO_2 = BC$, $O_1K = R_1 - R_2$, $O_1O_2 = R_1 + R_2$. По теореме Пифагора находим

$$KO_2 = \sqrt{O_1O_2^2 - O_1K^2} = 2\sqrt{R_1R_2}.$$

Итак, радиус окружности, описанной около треугольника ABC равен $\sqrt{R_1R_2}$. $\triangleleft$

§ 2. Вписанные и описанные четырехугольники

Четырехугольник называется *вписанным* в окружность, если окружность проходит через все его вершины.

Пусть четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность (рис. 13). Вписанные углы A и C опираются на дуги, дополняющие друг друга до окружности, следовательно, $\angle A + \angle C = 180°$. Аналогично, $\angle B + \angle D = 180°$. Итак, если четырехугольник вписан в окружность, то сумма противолежащих углов равна $180°$.

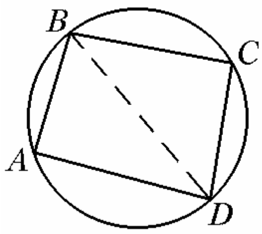


Рис. 13

Верно и обратное: если сумма противолежащих углов четырехугольника равна $180°$, то около этого четырехугольника можно описать окружность. Докажем это.

$\triangleright$ Пусть в четырехугольнике $ABCD$ $\angle B + \angle D = 180°$. Проведем через вершины A, B и C окружность. Требуется показать, что четвертая вершина D не может лежать ни внутри, ни вне этой окружности.

Допустим, что точка D лежит внутри окружности (рис. 14). Продолжим сторону CD до пересечения с окружностью, получим точку D_1. Четырехугольник $ABCD_1$ вписан в окружность, следовательно, $\angle B + \angle D_1 = 180°$. По условию $\angle B + \angle D = 180°$, поэтому $\angle D = \angle D_1$. Но $\angle D$ – внешний угол для треугольника ADD_1, внешний угол больше любого внутреннего, с ним не смежного. Значит, предположение неверно, точка D не может лежать внутри окружности. Совершенно аналогично доказывается, что точка D не может лежать и вне окружности (рис. 15). Следовательно, точка D должна лежать на окружности. ◁

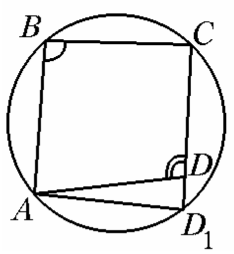


Рис. 14

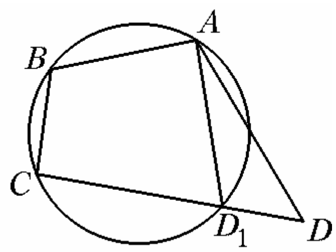


Рис. 15

1. Около параллелограмма можно описать окружность тогда и только тогда, когда этот параллелограмм есть прямоугольник.

Действительно, если $ABCD$ – параллелограмм, то его противолежащие углы равны: $\angle A = \angle C$. Если этот параллелограмм вписан в окружность, то $\angle A + \angle C = 180°$, значит, $\angle A = \angle C = 90°$. Аналогично $\angle B = \angle D = 90°$, $ABCD$ – прямоугольник. Обратное утверждение очевидно.

2. Около трапеции можно описать окружность тогда и только тогда, когда она равнобокая.

Это следует из того, что сумма углов трапеции (рис. 16), прилежащих к боковой стороне, равна $180°$ (как сумма внутренних односторонних при параллельных прямых): $\angle 1 + \angle 2 = 180°$. Около нее можно описать окружность тогда и только тогда, когда сумма противолежащих углов равна $180°$: $\angle 2 + \angle 3 = 180°$. Значит, $\angle 1 = \angle 3$. Отсюда следует, что равны вписанные углы, опирающиеся на боковые стороны, и, следовательно, равны и сами стороны.

Задача 8. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса $3\,\text{см}$ (рис. 17). Сторона AD является диаметром окружности, $CD = 4\,\text{см}$. Стороны AB и BC равны. Найти эти стороны.

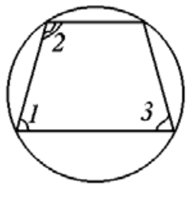


Рис. 16

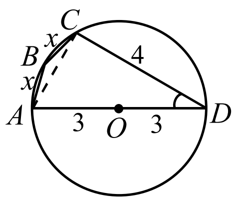


Рис. 17

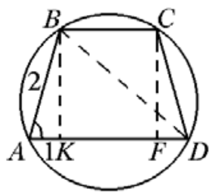


Рис. 18

▷ Неизвестные стороны обозначим $x\,\text{см}$, угол ADC обозначим φ. Четырехугольник вписан в окружность, значит, $\angle B = 180° - \varphi$. Проведем диагональ AC. Угол ACD опирается на диаметр, он прямой. Из прямоугольного треугольника ACD находим $\cos\varphi = 2/3$, $AC = AD\sin\varphi = AD\sqrt{1-\cos^2\varphi} = 2\sqrt{5}$ см. Из треугольника ABC по теореме косинусов будем иметь

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB\cdot BC\cos(180° - \varphi),$$

откуда, учитывая, что $\cos\left(180^\circ - \varphi\right) = -\cos\varphi,$ получим $20 = 2x^2 + 2x^2\cos\varphi$. Подставляем сюда значение $\cos\varphi = 2/3$ и находим $x = \sqrt{6}$ см. ◁

Задача 9. Основания равнобокой трапеции равны $1\,\text{см}$ и $3\,\text{см}$, боковые стороны равны $2\,\text{см}$ (рис. 18). Найти радиус окружности, описанной около этой трапеции.

▷ Трапеция равнобокая. Если $BK \perp AD$ и $CF \perp AD$, то по свойству трапеции $AK = FD = (AD - BC)/2 = 1\,\text{см}$. В прямоугольном треугольнике ABK гипотенуза AB в два раза больше катета AK, следовательно, $\angle ABK = 30°$ и $\angle BAK = 60°$. Около равнобокой трапеции можно описать окружность. Эта окружность описана и около треугольника ABD. Радиус R этой окружности выражается через угол и противолежащую сторону по формуле $R = a/2\sin A$. Найдем $a = BD = \sqrt{AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD\cos 60^\circ} = \sqrt{7}$ см. Следовательно, $R = a/2\sin A = \sqrt{7/3}$ см. ◁

Четырехугольник называется *описанным* около окружности, если окружность касается всех его сторон.

Пусть четырехугольник $ABCD$ описан около окружности (рис. 19). Точки касания окружностью сторон четырехугольника обозначим M, N, P, Q. По свойству касательных: $AM = AN$, $BP = NB$, $MD = QD$, $PC = CQ$. Складывая эти равенства, получим: $AM + MD + BP + PC = AN + NB + CQ + QD$, что означает $AD + BC = AB + CD$. Итак, **если четырехугольник описан около окружности, то суммы противолежащих сторон равны.**

Докажем, что справедливо и такое утверждение: **если в выпуклом четырехугольнике суммы длин противолежащих сторон равны, то в этот четырехугольник можно вписать окружность.**

▷ Пусть в выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $AD + BC = AB + CD$. Если докажем, что существует единственная точка, равноудаленная от всех сторон четырехугольника, то эта точка, очевидно, будет центром окружности, касающейся всех сторон четырехугольника. Положим $AD = a$, $AB = b$, $BC = c$, $CD = d$. По условию $a + c = b + d$, что равносильно $c - b = d - a$. Пусть $d > a$. Отложим на большей стороне CD меньшую сторону $DM = a$ (рис. 20). Так

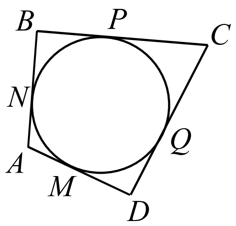


Рис. 19

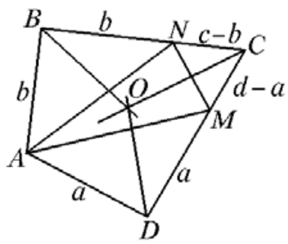


Рис. 20

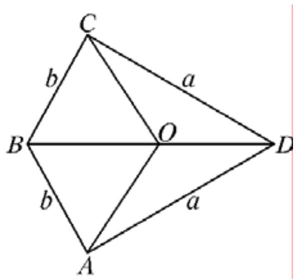


Рис. 21

как в этом случае $c > b$, то также отложим $BN = b$. Получим три равнобедренных треугольника ABN, ADM, MCN.

В равнобедренном треугольнике биссектриса угла при вершине является медианой и высотой, отсюда следует, что если провести биссектрисы углов B, C, D трапеции, то они разделят пополам соответственно отрезки AN, AM, MN и будут им перпендикулярны. Это означает, что эти биссектрисы будут серединными перпендикулярами трех сторон треугольника AMN, а они по теореме пересекаются в одной точке. Эта точка одинаково удалена от сторон AB и BC (лежит на OB), CD и AD (лежит на OD) и BC и CD (лежит на OC), следовательно, точка O одинаково удалена от всех четырех сторон четырехугольника $ABCD$.

Если $d = a$, то $c = b$ (рис. 21), биссектрисы углов B и D лежат на одной прямой (перпендикулярны AC и проходят через середину AC), и четырехугольник $ABCD$ симметричен относительно прямой BD. Пусть биссектриса угла C пересекает BD в точке O, тогда (в силу симметрии) AO – биссектриса угла A, и, следовательно, точка O одинаково удалена от всех четырех сторон, и в этот четырехугольник можно вписать окружность ч.т.д. ◁

Задача 10. Равнобокая трапеция с основаниями a и b $(a > b)$ описана около окружности. Найти 1) радиус окружности и 2) косинус угла при большем основании.

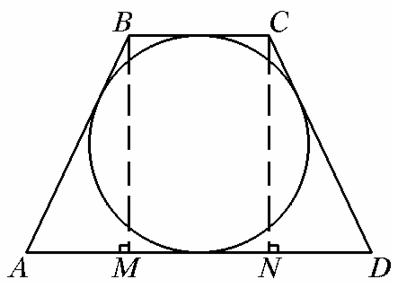


Рис. 22

▷ Пусть в равнобокой трапеции $ABCD$ $BC = b$, $AD = a$ (рис. 22). Эта трапеция равнобокая, $AB = CD$; она описана около окружности, следовательно, $AB + CD = AD + BC$. Отсюда получаем: $AB = CD = (a+b)/2$. Проведем BM и CN перпендикулярно AD. Трапеция равнобокая, углы при основании равны, следовательно, равны и треугольники ABM и DCN и $AM = ND$. По построению $MBCN -$прямоугольник, $MN = BC = b$, поэтому $AM = (AD - BC)/2 = (a-b)/2$. Из прямоугольного треугольника ABM находим

$$\cos A = \frac{AM}{AB} = \frac{a-b}{a+b} \quad \text{и}$$

$$BM = \sqrt{AB^2 - AM^2} = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} = \sqrt{ab}\,.$$

Очевидно, что высота трапеции равна диаметру окружности, поэтому радиус окружности равен $\sqrt{ab}/2$. ◁

Задача 11. Около окружности описан четырехугольник $ABCD$, в котором $\angle A = 90°$, $\angle C = 60°$, $AB = 2$ см, $AD = 3$ см (рис. 23). Найти периметр четырехугольника.

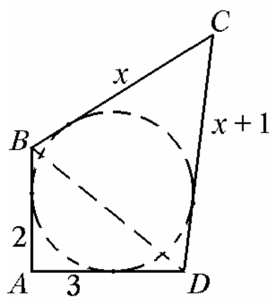


Рис. 23

▷ Пусть $BC = x$ см. Четырехугольник описан около окружности, значит $AB + CD = AD + BC$, откуда следует $CD = (x+1)$ см. Из прямоугольного треугольника ABC находим $BD^2 = 13\text{ см}^2$, а из треугольника BCD по теореме косинусов получаем $13 = x^2 + (x+1)^2 - 2x(x+1)\cos 60°$, что приводит к уравнению $x^2 + x - 12 = 0$. Его положительный корень $x = 3$.

Итак, $BC = 3$ см, $CD = 4$ см, и периметр четырехугольника $ABCD$ равен 12 см. ◁

§ 3. Задачи на построение

Задачи на построение рассматривались в задании № 2 для 8 класса. Однако некоторые учащиеся поступили в ЗФТШ только в этом году, поэтому уделим этой теме внимание еще раз, остановимся также на методе геометрических мест, методе подобия и методе симметрии.

В задачах на построение требуется построить некоторую геометрическую фигуру, используя только линейку и циркуль. С помощью линейки можно проводить прямую (но нельзя с ее помощью откладывать отрезки или, пользуясь двумя краями, проводить параллельные прямые), с помощью циркуля можно на данной прямой отложить любой данный отрезок, а также проводить окружности любого радиуса.

Главное в задачах на построение – это найти и описать последовательность действий (осуществляемых с помощью циркуля и линейки), ведущих к построению нужной фигуры, доказать, что построенная фигура удовлетворяет всем условиям задачи, выяснить, всегда ли построение можно осуществить, сколько существует решений, нет ли частных случаев, в которых построение упрощается, усложняется или делается невозможным.

При решении задач, как составные шаги решения, будем использовать основные построения, считая их известными (повторите по учебнику):

Построение 1: построение треугольника по трем сторонам.

Построение 2: построение угла, равного данному, от полупрямой в данную полуплоскость.

Построение3: построение биссектрисы угла.

Построение 4: деление отрезка пополам (одновременное построение серединного перпендикуляра данного отрезка).

Построение 5: построение перпендикуляра к данной прямой через данную точку.

Построение 6: построение прямой, проходящей через данную точку параллельно данной прямой.

Как правило, решение задач на построение начинают с анализа задачи. Предполагают задачу решенной и делают от руки примерный чертеж искомой фигуры. По чертежу, используя данные задачи, пытаются установить, к нахождению какой точки (прямой, окружности) сводится решение задачи. При этом часто приходится проводить дополнительные построения. Иногда это делается наудачу, не зная заранее, принесет ли такое построение пользу или нет. Удача и простота решения зависят главным образом от навыка решения таких задач, от знания ме

тодов решения задач на построение. Рассмотрим пример задачи на построение.

Задача 12. Дан отрезок m и острый угол α. Построить прямоугольный треугольник с углом α, у которого сумма катетов равна m.

▷ Анализ. Предположим, что задача решена, построен прямоугольный треугольник ABC, в котором $\angle A = \alpha$ и $AC + BC = m$ (рис. 24). На прямой AC отложим отрезок CD, равный катету BC, тогда $AD = m$, а треугольник BCD – прямоугольный равнобедренный, т.е. $\angle BDC = 45°$. Мы получили треугольник ABD, в котором известна сторона AD и два прилежащих к ней угла – такой треугольник можно построить.

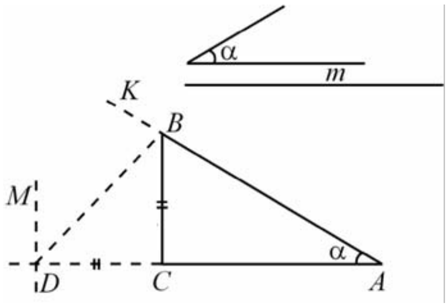


Рис. 24

Построение.

Шаг 1. На прямой откладываем отрезок $AD = m$ и строим угол DAK, равный данному углу α (построение 2).

Шаг 2. Через точку D проводим перпендикуляр DM к прямой DA (построение 5).

Шаг 3. Проводим биссектрису прямого угла MDC (построение 3), получаем точку B на луче AK.

Шаг 4. Через точку B проводим перпендикуляр к прямой AD (построение 5), получаем точку C. Треугольник ABC – искомый.

Действительно, $\angle BAC = \alpha$, а из $BC \perp AD$ и $\angle BDC = 45°$ следует, что $AC + BC = AC + CD = m$. Построение возможно всегда, треугольник ADB, а следовательно, и треугольник ABC определяются единственным образом. ◁

<u>Замечание.</u> В этой задаче была задана сумма двух сторон треугольника, и мы как бы “развернули” эти стороны так, что они легли на одну прямую, – получили отрезок AD. Этот прием называется <u>методом спрямления</u> и обычно применяется в задачах, условия которых содержат сумму или разность сторон треугольника (четырехугольника).

Обратите внимание, что в решении задач на построение можно выделить 4 обязательных этапа: анализ, в котором намечается план построения, само построение, доказательство того, что построенная фигура удовлетворяет условиям и, наконец, исследование возможности построения. Анализ опускают в простых задачах или тех, решение которых уже известно.

Одним из методов решения задач на построение является *метод геометрических мест*. Особенно удобен этот метод, когда требуется построить точку (или точки), удовлетворяющие нескольким условиям. При решении задач часто используется знание следующих геометрических мест:

а) геометрическое место точек, находящихся на данном расстоянии a от точки A, есть окружность радиуса a с центром в точке A;

б) геометрическое место точек, равноудаленных от точек A и B, есть серединный перпендикуляр отрезка AB;

в) геометрическое место точек, находящихся на заданном расстоянии от прямой l, есть две прямые, параллельные l;

г) геометрическое место центров окружностей, касающихся данной прямой AB в точке C, есть перпендикуляр к AB в точке C (за исключением точки C)

д) геометрическое место вершин прямоугольных треугольников с гипотенузой AB, есть окружность с диаметром AB, за исключением точек A и B.

Проиллюстрируем указанный метод на следующей задаче.

Задача 13. Построить окружность, проходящую через данную точку A и касающуюся данной прямой l в точке B.

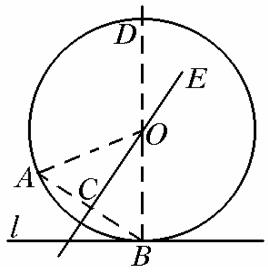


Рис. 25

▷ Анализ. Так как окружность должна касаться прямой l в точке B (рис. 25), то ее центр O должен принадлежать перпендикуляру BD к прямой l. Кроме того, окружность должна проходить через точки A и B, следовательно, ее центр должен быть одинаково удален от этих точек, т.е. лежать на серединном перпендикуляре CE к отрезку

AB . Поэтому искомый центр, находясь одновременно на прямых BD и CE,

является точкой их пересечения.

<u>Построение</u> – проведение этих прямых (построения 4 и 5).

<u>Доказательство.</u> $CE \perp AB$, $AC = CB$, $\Delta COB = \Delta COA$ (по двум катетам), следовательно, $OA = AB$. Точка B лежит на окружности и $OB \perp l$, следовательно, l – касательная в точке B .

<u>Исследование.</u> Задача имеет решение и притом единственное, если прямые BD и CE пересекаются, не параллельны, т.е. если точка A не лежит на прямой l. ◁

<u>Метод подобия.</u> Во многих задачах бывает удобно строить сначала не саму искомую фигуру, а ей подобную. В этом случае данные для построения разбиваются на две группы: одни используются для построения подобных фигур (подобных фигур существует бесконечно много), а другие служат для того, чтобы от этих фигур перейти к искомой. Метод подобия часто применяется при вписывании одних фигур в другие.

Задача 14. В данный треугольник вписать квадрат так, чтобы одна сторона квадрата лежала на стороне треугольника, а две вершины лежали на других сторонах треугольника.

▷ Ослабим задачу. Построим квадрат, у которого одна сторона лежит на стороне треугольника и одна вершина лежит на другой стороне треугольника. Эта задача проще и имеет много решений.

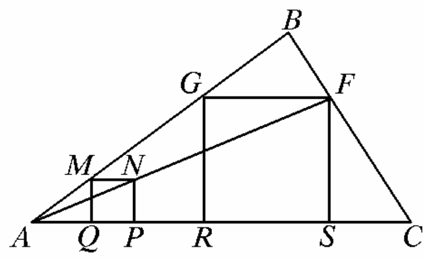


Рис. 26

Возьмем, например, на стороне AB некоторую точку M (рис. 26)

и опустим перпендикуляр MQ на AC .

и опустим перпендикуляр MQ на AC . Далее строим квадрат $MNPQ$ (построение 5 и 6). Для построения искомого квадрата надо квадрат $MNPQ$ как бы “растянуть” так, чтобы он удовлетворял и другому условию: одна из вершин принадлежала стороне BC . Для этого проведем через точки A и N прямую AF . Опустим из точки F перпендикуляр FS на отрезок AC , проведем через точку F прямую, параллельную AC, и из точки G опустим перпендикуляр GR на отрезок AC (построения 5 и 6). Докажем, что $FSRG$ – квадрат. Достаточно доказать, что $FS = FG$. Из подобия треугольников ANP и AFS имеем

$$FS : NP = AF : AN \tag{1}$$

Аналогично, из подобия треугольников AMN и AGF имеем

$$FG : MN = AF : AN \tag{2}$$

Так как $NP = MN$, то из (1) и (2) следует, что $FS = FG$, т.е. $FRSG$ – квадрат. Исследование проведите самостоятельно. ◁

В заключении остановимся на *методе симметрии*. Задачу иногда удается упростить, заменив один из заданных элементов (точку, прямую, окружность) другим, симметрично расположенным относительно некоторой прямой. Классическим примером такой задачи является следующая.

Задача 15. Даны две точки A и B, расположенные по одну сторону от данной прямой. Найти на прямой точку, сумма расстояний от которой до двух заданных точек наименьшая.

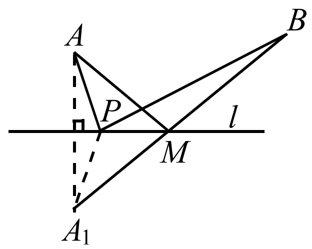


Рис. 27

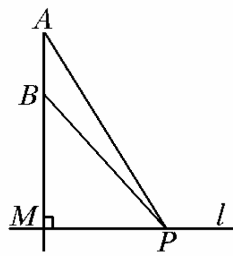


Рис. 28

▷ Анализ. Рассмотрим точку A_1, симметричную данной точке A относительно данной прямой (рис. 27), и пусть точка P – произвольная точка этой прямой. Так как $AP = A_1P$, то $AP + BP = A_1P + BP$. Сумма $AP + PB$ будет наименьшей, когда сумма $A_1P + PB$ достигнет наименьшего значения. А последняя сумма, очевидно, будет наименьшей тогда, когда точка P будет лежать на прямой A_1B.

Теперь очевидно построение: строим точку, симметричную одной из заданных точек относительно заданной прямой, проводим через нее и другую точку прямую; точка пересечения построенной прямой и данной будет искомой. Доказательство очевидно. Задача всегда имеет единственное решение. В частном случае, когда точки A и B лежат на общем перпендикуляре к прямой, построение очевидно (рис. 28).

$$AP + PB > AM + BM \text{, если } P \neq M\text{ . } \lhd$$

Обратите внимание:

1. Если в контрольном вопросе сначала требуется сформулировать или доказать теорему, то в конкретном примере к этому вопросу, конечно, надо применить эту теорему.

2. Если в решении какие-то выражения получаются иррациональные ($a = \sqrt{7}$ или $\sin\alpha = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ и т. п.), то не следует заменять их на приближённые значения. В ответе давать их точное значение, а в дальнейших вычислениях подставлять $a = \sqrt{7}$ и находить, например, $\cos\alpha$ по формуле $\cos\alpha = +\sqrt{1-\sin^2\alpha}$ (если угол α острый) и $\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha}$, если угол α тупой.

3. Задачи 7 и 11 – необязательные.

Контрольные вопросы

1(2). Чему равен радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с катетами 7 и 24?

2(3). Как измеряется угол между касательной и хордой, имеющими общую точку на окружности?

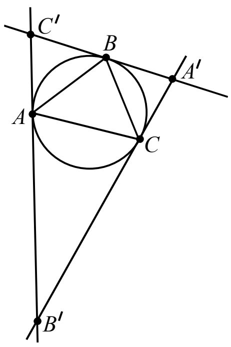


Рис.1

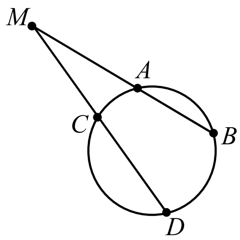


Рис. 2

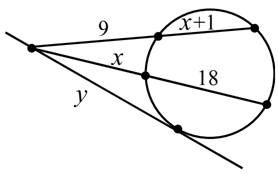


Рис. 3

Около треугольника ABC с углами $\angle A = 40^\circ$, $\angle B = 80^\circ$, описана окружность, касательные к окружности в точках A, B, и C пересекаются в точках A', B', C'. (рис. 1). Чему равны углы треугольника A', B', C'?

3(3). Сформулируйте теорему о касательной и секущей.

Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник ABC $(AB = BC)$, касается стороны BC в точке K. Прямая AK пересекает окружность в точке L, $AL = 1, LK = 3$. Чему равны длины AC, CK, и BC?

4(3). Докажите, что если MB и $MD-$ секущие (см. рис. 2), то $MA \cdot MB = MC \cdot MD$.
Найдите x и y (см. рис. 3)

5(3). Докажите, что $a = 2R\sin\alpha$ $(R-$ радиус окружности, $a-$ её хорда, $\alpha-$ величина вписанного угла, опирающегося на эту хорду).

Чему равен радиус окружности, описанной около треугольника ABC, в котором $AB = 3, BC = 5, \angle ABC = 120^\circ$?

6(2). Какие две окружности называются касающимися внутренне?

Две окружности касаются внутренне в точке M (рис. 4), MB и $MD-$ хорды большей окружности. Верно ли, что $AC \| BD$?

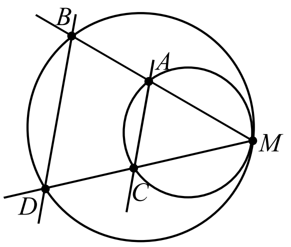


Рис. 4

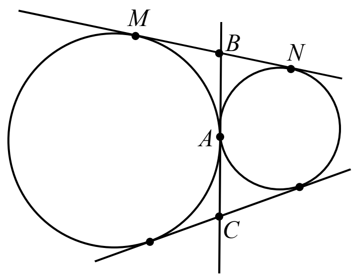


Рис. 5

7(3). Две окружности радиусов R_1 и R_2 касаются внешне в точке A (рис. 5) а) Чему равен отрезок BC их общей внутренней касательной, заключительный между двумя внешними касательными? б) Чему равен угол MAN?

8(2). В окружности радиуса R проведены две взаимно перпендикулярные пересекающиеся хорды AB и CD. Как доказать, что $AD^2 + BC^2 = 4R^2$?

9(2). Когда около четырехугольника можно описать окружность? В треугольнике ABC биссектрисы AA_1 и BB_1 пересекаются в точке O, точки A_1, O, B_1, C лежат на одной окружности. Чему равен угол C?

10(2). В трапецию $ABCD\,(BC\|AD)$ вписана окружность с центром в точке O.

Чему равен угол AOB? Чему равно отношение периметра к средней линии?

11(2). Может ли около окружности радиуса 1мм быть описан треугольник, наименьшая сторона которого больше 1 км?

12(4). Как с помощью циркуля и линейки (дайте краткое описание) по данным отрезкам a, b и c построить отрезки

$$x_1 = \sqrt{a^2 + b^2},\ x_2 = \sqrt{ab},\ x_3 = \frac{ac}{b}?$$

Как свести построение отрезков

$$y_1 = \sqrt{3a^2 + 2ab},\ y_2 = \frac{a^3}{b^2},\ y_3 = \sqrt[4]{a^4 + b^4}$$

к последовательному применению каких-то из построений отрезков вида x_1, x_2, x_3?

Задачи

1(5). В равнобедренном треугольнике ABC с основанием $AC = 12$ и боковой стороной $AB = 10$ найти радиус вписанной окружности, радиус описанной окружности и расстояние между центрами этих окружностей.

2(5). Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность с центром на гипотенузу AB проходит через вершину A и касается катета BC в точке D, при этом $BD = 5$ и $CD = 4$. Найти а) стороны треугольника ABC, б) радиус окружности.

3(6). Две окружности радиусов R_1 и R_2 касаются внешне в точке A. Общие внешние касательные пересекаются в точке D, а общая внутренняя касательная, проходящая через точку A, пересекает внешние касательные в точках B и C. Найти периметр треугольника BCD.

4(6). В треугольнике ABC биссектрисы AA_1 и BB_1 пересекаются в точке O; точки A_1, O, B_1, C лежат на одной окружности. Найти площадь треугольника OA_1B_1, если $A_1B_1 = 2$.

5(6). Окружность касается большего основания AD равнобокой трапеции $ABCD$, касается также её боковых сторон AB и CD и проходит через точку пересечения диагоналей трапеции. Найти радиус окружности и высоту трапеции, если $AD = 7$ и $BC = 1$.

6(6). Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B. Хорда AC окружности ω_1 касается окружности ω_2, а хорда AD окружности ω_2 касается окружности ω_1. Найти длину хорды CD, если $AC = a$, $AD = \hat{a}$ и $BC = \tilde{n}$.

7*(6). Окружность проходит через вершины A, B и C параллелограмма $ABCD$. Продолжение диагонали BD пересекает окружность в точке K. Найти длины диагоналей параллелограмма, если $AB = 4$, $BC = 3$ и $BK = \frac{25}{3}$.

8(6). Окружности радиусов 2 и 3 вписаны в углы B и C треугольника ABC, обе окружности касаются биссектрисы AD. Окружности касаются стороны BC в точках K и F, $KF = 7$. Найти длину биссектрисы.

9(5). Доказать теорему Птолемея: если около 4-х угольника $ABCD$ описана окружность, то имеет место равенство $AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$.

Задачи на построение с циркулем и линейкой

10(5). Дана прямая l и две точки A и B по одну сторону от неё. Построить окружность, проходящую через точки A и B и касающуюся прямой l.

11*(5). Дан треугольник ABC. Построить равносторонний треугольник площадь которого равна площади данного треугольника.

12(5). Дан угол с вершиной в точке O и точка M внутри угла, не лежащая на биссектрисе угла.

а) провести через точку M прямую так, чтобы её отрезок, заключённый внутри угла, делился в точке M пополам.

б) Найти на сторонах угла точки A и B такие, чтобы периметр треугольника ABM был наименьший.