

Контрольные вопросы

1(2). Чему равен радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с катетами 7 и 24?

2(3). Как измеряется угол между касательной и хордой, имеющими общую точку на окружности?

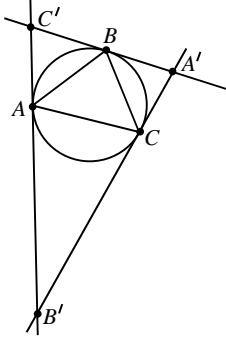


Рис.1

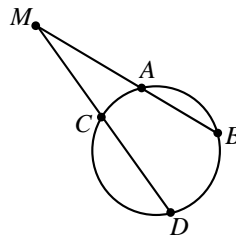


Рис. 2

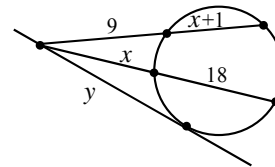


Рис. 3

Около треугольника ABC с углами $\angle A = 40^\circ$, $\angle B = 80^\circ$, описана

окружность, касательные к окружности в точках A, B , и C пересекаются в точках A', B', C' . (рис. 1). Чему равны углы треугольника A', B', C' ?

3(3). Сформулируйте теорему о касательной и секущей.

Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$), касается стороны BC в точке K . Прямая AK пересекает окружность в точке L , $AL = 1$, $LK = 3$. Чему равны длины AC , CK , и BC ?

4(3). Докажите, что если MB и MD – секущие (см. рис. 2), то $MA \cdot MB = MC \cdot MD$.

Найдите x и y (см. рис. 3)

5(3). Докажите, что $a = 2R \sin \alpha$ (R – радиус окружности, a – её хорда, α – величина вписанного угла, опирающегося на эту хорду).

Чему равен радиус окружности, описанной около треугольника ABC , в котором $AB = 3$, $BC = 5$, $\angle ABC = 120^\circ$?

6(2). Какие две окружности называются касающимися внутренне?

Две окружности касаются внутренне в точке M (рис. 4), MB и MD – хорды большей окружности. Верно ли, что $AC \parallel BD$?

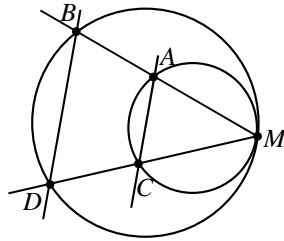


Рис. 4

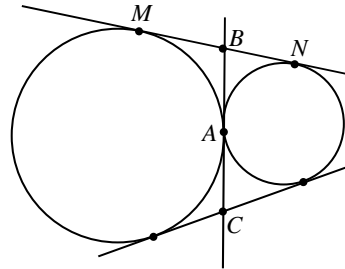


Рис. 5

7(3). Две окружности радиусов R_1 и R_2 касаются внешне в точке A (рис. 5) а) Чему равен отрезок BC их общей внутренней касательной, заключительный между двумя внешними касательными? б) Чему равен угол MAN ?

8(2). В окружности радиуса R проведены две взаимно перпендикулярные пересекающиеся хорды AB и CD . Как доказать, что $AD^2 + BC^2 = 4R^2$?

9(2). Когда около четырехугольника можно описать окружность? В треугольнике ABC биссектрисы AA_1 и BB_1 пересекаются в точке O , точки A_1 , O , B_1 , C лежат на одной окружности. Чему равен угол C ?

10(2). В трапецию $ABCD$ ($BC \parallel AD$) вписана окружность с центром в точке O .

Чему равен угол AOB ? Чему равно отношение периметра к средней линии?

11(2). Может ли около окружности радиуса 1 мм быть описан треугольник, наименьшая сторона которого больше 1 км?

12(4). Как с помощью циркуля и линейки (дайте краткое описание) по данным отрезкам a , b и c построить отрезки

$$x_1 = \sqrt{a^2 + b^2}, x_2 = \sqrt{ab}, x_3 = \frac{ac}{b}?$$

Как свести построение отрезков

$$y_1 = \sqrt{3a^2 + 2ab}, y_2 = \frac{a^3}{b^2}, y_3 = \sqrt[4]{a^4 + b^4}$$

к последовательному применению каких-то из построений отрезков вида x_1, x_2, x_3 ?

Задачи

1(5). В равнобедренном треугольнике ABC с основанием $AC = 12$ и боковой стороной $AB = 10$ найти радиус вписанной окружности, радиус описанной окружности и расстояние между центрами этих окружностей.

2(5). Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность с центром на гипотенузу AB проходит через вершину A и касается катета BC в точке D , при этом $BD = 5$ и $CD = 4$. Найти а) стороны треугольника ABC , б) радиус окружности.

3(6). Две окружности радиусов R_1 и R_2 касаются внешне в точке A . Общие внешние касательные пересекаются в точке D , а общая внутренняя касательная, проходящая через точку A , пересекает внешние касательные в точках B и C . Найти периметр треугольника BCD .

4(6). В треугольнике ABC биссектрисы AA_1 и BB_1 пересекаются в точке O ; точки A_1, O, B_1, C лежат на одной окружности. Найти площадь треугольника OA_1B_1 , если $A_1B_1 = 2$.

5(6). Окружность касается большего основания AD равнобокой трапеции $ABCD$, касается также её боковых сторон AB и CD и проходит через точку пересечения диагоналей трапеции. Найти радиус окружности и высоту трапеции, если $AD = 7$ и $BC = 1$.

6(6). Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B . Хорда AC окружности ω_1 касается окружности ω_2 , а хорда AD окружности ω_2 касается окружности ω_1 . Найти длину хорды CD , если $AC = a$, $AD = \hat{a}$ и $BC = \tilde{b}$.

7*(6). Окружность проходит через вершины A , B и C параллелограмма $ABCD$. Продолжение диагонали BD пересекает окружность в точке K . Найти длины диагоналей параллелограмма, если $AB = 4$, $BC = 3$ и $BK = \frac{25}{3}$.

8(6). Окружности радиусов 2 и 3 вписаны в углы B и C треугольника ABC , обе окружности касаются биссектрисы AD . Окружности касаются стороны BC в точках K и F , $KF = 7$. Найти длину биссектрисы.

9(5). Доказать теорему Птолемея: если около 4-х угольника $ABCD$ описана окружность, то имеет место равенство $AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$.

Задачи на построение с циркулем и линейкой

10(5). Дана прямая l и две точки A и B по одну сторону от неё. Построить окружность, проходящую через точки A и B и касающуюся прямой l .

11*(5). Дан треугольник ABC . Построить равносторонний треугольник площадь которого равна площади данного треугольника.

12(5). Дан угол с вершиной в точке O и точка M внутри угла, не лежащая на биссектрисе угла.

а) провести через точку M прямую так, чтобы её отрезок, заключённый внутри угла, делился в точке M пополам.

б) Найти на сторонах угла точки A и B такие, чтобы периметр треугольника ABM был наименьший.