

§ 2. Вписанные и описанные четырехугольники

Четырехугольник называется *вписанным* в окружность, если окружность проходит через все его вершины.

Пусть четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность (рис. 13). Впи-

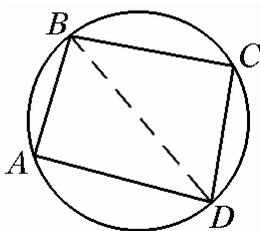


Рис. 13

санные углы A и C опираются на дуги, дополняющие друг друга до окружности, следовательно,

$\angle A + \angle C = 180^\circ$. Аналогично,

$\angle B + \angle D = 180^\circ$. Итак, если четырехугольник вписан в окружность, то сумма противоположных углов равна 180° .

Верно и обратное: если сумма противоположных углов четырехугольника равна 180° , то около этого четырехугольника можно описать

окружность. Докажем это.
 \triangleright Пусть в четырехугольнике $ABCD$ $\angle B + \angle D = 180^\circ$. Проведем через вершины A , B и C окружность. Требуется показать, что четвертая вершина D не может лежать ни внутри, ни вне этой окружности.

Допустим, что точка D лежит внутри окружности (рис. 14). Продолжим сторону CD до пересечения с окружностью, получим точку D_1 . Четырехугольник $ABCD_1$ вписан в окружность, следовательно, $\angle B + \angle D_1 = 180^\circ$. По условию $\angle B + \angle D = 180^\circ$, поэтому $\angle D = \angle D_1$. Но $\angle D$ – внешний угол для треугольника ADD_1 , внешний угол больше любого внутреннего, с ним не смежного. Значит, предположение неверно, точка D не может лежать внутри окружности. Совершенно аналогично доказывается, что точка D не может лежать и вне окружности (рис. 15). Следовательно, точка D должна лежать на окружности. \triangleleft

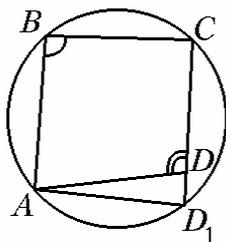


Рис. 14

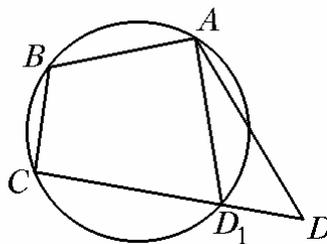


Рис. 15

1. Около параллелограмма можно описать окружность тогда и только тогда, когда этот параллелограмм есть прямоугольник.

Действительно, если $ABCD$ – параллелограмм, то его противоположные углы равны: $\angle A = \angle C$. Если этот параллелограмм вписан в окружность, то $\angle A + \angle C = 180^\circ$, значит, $\angle A = \angle C = 90^\circ$. Аналогично $\angle B = \angle D = 90^\circ$, $ABCD$ – прямоугольник. Обратное утверждение очевидно.

2. Около трапеции можно описать окружность тогда и только тогда, когда она равнобокая.

Это следует из того, что сумма углов трапеции (рис. 16), прилежащих к боковой стороне, равна 180° (как сумма внутренних односторонних при параллельных прямых): $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$. Около нее можно описать окружность тогда и только тогда, когда сумма противоположных углов равна 180° : $\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$. Значит, $\angle 1 = \angle 3$. Отсюда следует, что равны вписанные углы, опирающиеся на боковые стороны, и, следовательно, равны и сами стороны.

Задача 8. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса 3 см (рис. 17). Сторона AD является диаметром окружности, $CD = 4$ см. Стороны AB и BC равны. Найти эти стороны.

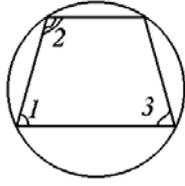


Рис. 16

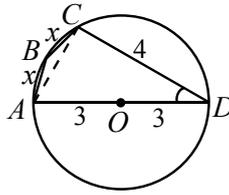


Рис. 17

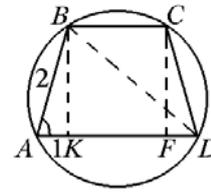


Рис. 18

▷ Неизвестные стороны обозначим x см, угол ADC обозначим φ . Четырехугольник вписан в окружность, значит, $\angle B = 180^\circ - \varphi$. Проведем диагональ AC . Угол ACD опирается на диаметр, он прямой. Из прямоугольного треугольника ACD находим $\cos \varphi = 2/3$, $AC = AD \sin \varphi = AD \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = 2\sqrt{5}$ см. Из треугольника ABC по теореме косинусов будем иметь

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos(180^\circ - \varphi),$$

откуда, учитывая, что $\cos(180^\circ - \varphi) = -\cos \varphi$, получим $20 = 2x^2 + 2x^2 \cos \varphi$. Подставляем сюда значение $\cos \varphi = 2/3$ и находим $x = \sqrt{6}$ см. ◁

Задача 9. Основания равнобокой трапеции равны 1 см и 3 см, боковые стороны равны 2 см (рис. 18). Найти радиус окружности, описанной около этой трапеции.

▷ Трапеция равнобокая. Если $BK \perp AD$ и $CF \perp AD$, то по свойству трапеции $AK = FD = (AD - BC)/2 = 1$ см. В прямоугольном треугольнике ABK гипотенуза AB в два раза больше катета AK , следовательно, $\angle ABK = 30^\circ$ и $\angle BAK = 60^\circ$. Около равнобокой трапеции можно описать окружность. Эта окружность описана и около треугольника ABD . Радиус R этой окружности выражается через угол и про-

тиволежащую сторону по формуле $R = a / 2 \sin A$. Найдем $a = BD = \sqrt{AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos 60^\circ} = \sqrt{7}$ см. Следовательно, $R = a / 2 \sin A = \sqrt{7/3}$ см. ◁

Четырехугольник называется *описанным* около окружности, если окружность касается всех его сторон.

Пусть четырехугольник $ABCD$ описан около окружности (рис. 19). Точки касания окружностью сторон четырехугольника обозначим M , N , P , Q . По свойству касательных: $AM = AN$, $BP = NB$, $MD = QD$, $PC = CQ$. Складывая эти равенства, получим: $AM + MD + BP + PC = AN + NB + CQ + QD$, что означает $AD + BC = AB + CD$. Итак, **если четырехугольник описан около окружности, то суммы противоположных сторон равны.**

Докажем, что справедливо и такое утверждение: **если в выпуклом четырехугольнике суммы длин противоположных сторон равны, то в этот четырехугольник можно вписать окружность.**

▷ Пусть в выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $AD + BC = AB + CD$. Если докажем, что существует единственная точка, равноудаленная от всех сторон четырехугольника, то эта точка, очевидно, будет центром окружности, касающейся всех сторон четырехугольника. Положим $AD = a$, $AB = b$, $BC = c$, $CD = d$. По условию $a + c = b + d$, что равносильно $c - b = d - a$. Пусть $d > a$. Отложим на большей стороне CD меньшую сторону $DM = a$ (рис. 20). Так

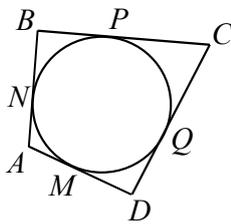


Рис. 19

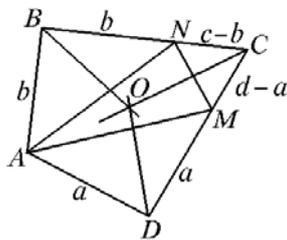


Рис. 20

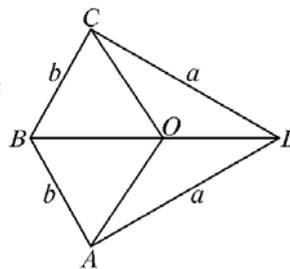


Рис. 21

как в этом случае $c > b$, то также отложим $BN = b$. Получим три равнобедренных треугольника ABN , ADM , MCN .

В равнобедренном треугольнике биссектриса угла при вершине является медианой и высотой, отсюда следует, что если провести биссектрисы углов B , C , D трапеции, то они разделят пополам соответственно отрезки AN , AM , MN и будут им перпендикулярны. Это означает, что эти биссектрисы будут серединными перпендикулярами трех сторон треугольника AMN , а они по теореме пересекаются в одной точке. Эта точка одинаково удалена от сторон AB и BC (лежит на OB), CD и AD (лежит на OD) и BC и CD (лежит на OC), следовательно, точка O одинаково удалена от всех четырех сторон четырехугольника $ABCD$.

Если $d = a$, то $c = b$ (рис. 21), биссектрисы углов B и D лежат на одной прямой (перпендикулярны AC и проходят через середину AC), и четырехугольник $ABCD$ симметричен относительно прямой BD . Пусть биссектриса угла C пересекает BD в точке O , тогда (в силу симметрии) AO – биссектриса угла A , и, следовательно, точка O одинаково удалена от всех четырех сторон, и в этот четырехугольник можно вписать окружность ч.т.д. \triangleleft

Задача 10. Равнобокая трапеция с основаниями a и b ($a > b$) описана около окружности. Найти 1) радиус окружности и 2) косинус угла при большем основании.

\triangleright Пусть в равнобокой трапеции $ABCD$ $BC = b$, $AD = a$ (рис. 22). Эта трапеция равнобокая, $AB = CD$; она описана около окружности, следовательно, $AB + CD = AD + BC$. Отсюда получаем:

$AB = CD = (a + b)/2$. Проведем BM

и CN перпендикулярно AD . Трапеция равнобокая, углы при основании равны, следовательно, равны и треугольники ABM и DCN и $AM = ND$. По построению $MBCN$ – прямоугольник, $MN = BC = b$,

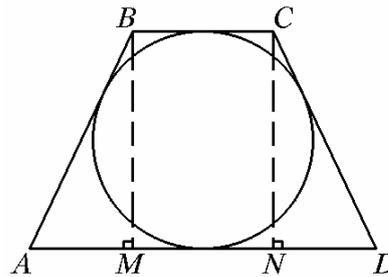


Рис. 22

поэтому $AM = (AD - BC)/2 = (a - b)/2$. Из прямоугольного треугольника ABM находим

$$\cos A = \frac{AM}{AB} = \frac{a - b}{a + b} \quad \text{и}$$

$$BM = \sqrt{AB^2 - AM^2} = \sqrt{\left(\frac{a + b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a - b}{2}\right)^2} = \sqrt{ab}.$$

Очевидно, что высота трапеции равна диаметру окружности, поэтому радиус окружности равен $\sqrt{ab}/2$. \triangleleft

Задача 11. Около окружности описан четырехугольник $ABCD$, в котором $\angle A = 90^\circ$, $\angle C = 60^\circ$, $AB = 2$ см, $AD = 3$ см (рис. 23). Найти периметр четырехугольника.

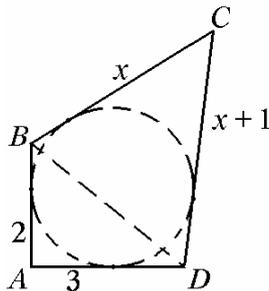


Рис. 23

\triangleright Пусть $BC = x$ см. Четырехугольник описан около окружности, значит $AB + CD = AD + BC$, откуда следует $CD = (x + 1)$ см. Из прямоугольного треугольника ABC находим $BD^2 = 13$ см², а из треугольника BCD по теореме косинусов получаем $13 = x^2 + (x + 1)^2 - 2x(x + 1)\cos 60^\circ$, что приводит к уравнению $x^2 + x - 12 = 0$.

Его положительный корень $x = 3$.

Итак, $BC = 3$ см, $CD = 4$ см, и периметр четырехугольника $ABCD$ равен 12 см. \triangleleft