§10. Неравенства для логарифмов с переменным основанием

Рассмотрим неравенство $\log_{a(x)} f(x) > 0,$ где $a(x), f(x)$ непрерывны на промежутке X.

ОДЗ: $a(x) > 0, a(x) \neq 1, f(x) > 0.$ Оказывается, что и в этом случае

знак функции $\log_{a(x)} f(x)$ совпадает со знаком произведения $(a(x)-1)(f(x)-1)$ в ОДЗ

(УР Л9)

и имеет место условие равносильности

$$\boxed{\log_{a(x)} f(x)>0(<0)\Leftrightarrow (a(x)-1)(f(x)-1)>0(<0) \text{ в ОДЗ.}} \quad \text{(УР Л10)}$$

Можно записать полное условие равносильности, включающее ОДЗ.

$$\boxed{\log_{a(x)} f(x)>0(<0)\Leftrightarrow \begin{cases} a(x)>0, \\ f(x)>0, \\ (a(x)-1)(f(x)-1)>0(<0). \end{cases}} \quad \text{(УР Л10*)}$$

Для нестрогого неравенства это условие выглядит по-другому.

$$\boxed{\log_{a(x)} f(x)\ge 0(\le 0)\Leftrightarrow \begin{cases} a(x)>0, \\ a(x)\ne 1, \\ f(x)>0, \\ (a(x)-1)(f(x)-1)\ge 0(\le 0). \end{cases}} \quad \text{(УР Л11)}$$

Действительно, по определению, $\log_{a(x)} f(x)=\dfrac{\lg f(x)}{\lg a(x)}$,

$a(x)>0, a(x)\ne 1, f(x)>0.$

В силу предыдущего условия равносильности (УР Л5), знаки $\lg f(x), \lg a(x)$ совпадают со знаками разностей $f(x)-1$ и $a(x)-1$ соответственно. Поэтому знак $\dfrac{\lg f(x)}{\lg a(x)}$ совпадает со знаком частного $\dfrac{f(x)-1}{a(x)-1}$, или со знаком произведения $(a(x)-1)(f(x)-1)$.

Рассмотрим неравенство $\log_{a(x)} f(x) > \log_{a(x)} g(x)$, где $a(x)$, $f(x), g(x)$ непрерывные функции и $a(x) > 0, a(x) \neq 1$.

По определению, $\log_{a(x)} f(x) - \log_{a(x)} g(x) = \dfrac{\lg f(x) - \lg g(x)}{\lg a(x)}$, и, в силу (УР Л5) и (УР Л7),

знак разности $\log_{a(x)} f(x) - \log_{a(x)} g(x)$ совпадает со знаком произведения $\left(a(x) - 1\right)\left(f(x) - g(x)\right)$ в ОДЗ.

(УР Л12)

Из полученного условия равносильности следует, что

$$\boxed{\begin{aligned}&\log_{a(x)} f(x) > (<) \log_{a(x)} g(x) \Leftrightarrow \\ &(a(x)-1)(f(x)-g(x)) > 0 (< 0)\end{aligned} \quad \text{в ОДЗ.}} \qquad \text{(УР Л13)}$$

Заметим, что из (УР Л12) автоматически следует, что $a(x) \neq 1$, поэтому при решении ***строгих неравенств*** условие $\underline{a(x) \neq 1}$ в ОДЗ можно ***опустить*** и так записать полное условие равносильности, включающее ОДЗ.

$$\boxed{\log_{a(x)} f(x) < \log_{a(x)} g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a(x) > 0, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ (a(x)-1)(f(x)-g(x)) < 0. \end{cases}} \text{(УРЛ 13*)}$$

Преимущество и красота приведенных условий равносильности состоит в том, что мы за один шаг освободились от логарифмов и переменных оснований. Теперь, если основание логарифма и подлогарифмическое выражение являются рациональными функциями, можно воспользоваться классическим методом интервалов.

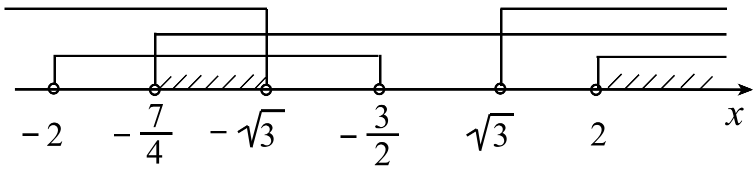
Заметим, что все условия равносильности ***формально*** точно такие же, как и для логарифмов с постоянным основанием, а потому легко запоминаются.

Пример 22. (МФТИ, 1980) Решите неравенство $\log_{x^2-3}(4x+7)>0$.

♦В силу (УР Л10), $\log_{x^2-3}(4x+7)>0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x+7>0 \Leftrightarrow x>-\dfrac{7}{4}, \\ x^2-3>0 \Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3};+\infty\right), \\ \left(x^2-3-1\right)(4x+7-1)>0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2)\left(x+\dfrac{3}{2}\right)>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in\left(-\frac{7}{4};-\sqrt{3}\right)\cup(2;+\infty).$$



Ответ: $\left(-\frac{7}{4};-\sqrt{3}\right)\cup(2;+\infty)$. ♦

Но, как показывает практика, не всегда этим удобно пользоваться полными условиями равносильности. Это происходит, если входящие в условия равносильности неравенства громоздки. Тогда удобно отделить нахождение ОДЗ от решения основного неравенства, как мы часто и будем делать.

Пример 23. (МФТИ, 1994). Решите неравенство

$$\log_8\left(\frac{1}{3}-x\right)\log_{\left|2x+\frac{1}{3}\right|}\left(\frac{1}{3}-x\right)>\log_2\frac{\left(\frac{1}{3}-x\right)}{\sqrt[3]{\left(2x+\frac{1}{3}\right)^2}}.$$

♦ ОДЗ: $\begin{cases} \frac{1}{3}-x>0 \Leftrightarrow x\in\left(-\infty;\frac{1}{3}\right), \\ 2x+\frac{1}{3}\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -\frac{1}{6}. \\ 2x+\frac{1}{3}\neq \pm 1 \Leftrightarrow x\neq \frac{\pm 3-1}{6} \Leftrightarrow x\neq \frac{1}{3},-\frac{2}{3}. \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-\frac{2}{3};\right)\cup\left(-\frac{2}{3};-\frac{1}{6}\right)\cup\left(-\frac{1}{6};\frac{1}{3}\right).$$

$$\log_8\left(\frac{1}{3}-x\right)\log_{\left|2x+\frac{1}{3}\right|}\left(\frac{1}{3}-x\right)>\log_2\frac{\left(\frac{1}{3}-x\right)}{\sqrt[3]{\left(2x+\frac{1}{3}\right)^2}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\log_2\left(\frac{1}{3}-x\right)\log_{\left|2x+\frac{1}{3}\right|}\left(\frac{1}{3}-x\right)>\log_2\left(\frac{1}{3}-x\right)-\frac{2}{3}\log_2\left|2x+\frac{1}{3}\right|\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left|2x+\frac{1}{3}\right|\left(\log^2_{\left|2x+\frac{1}{3}\right|}\left(\frac{1}{3}-x\right)-3\log_{\left|2x+\frac{1}{3}\right|}\left(\frac{1}{3}-x\right)+2\right)>0\Leftrightarrow$$

(т. к. $t^2-3t+2=(t-1)(t-2)$)

$$\log_2\left|2x+\frac{1}{3}\right|\left(\log_{\left|2x+\frac{1}{3}\right|}\left(\frac{1}{3}-x\right)-1\right)\left(\log_{\left|2x+\frac{1}{3}\right|}\left(\frac{1}{3}-x\right)-2\right)>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left|2x+\frac{1}{3}\right|\left(\log_{\left|2x+\frac{1}{3}\right|}\left(\frac{1}{3}-x\right)-\log_{\left|2x+\frac{1}{3}\right|}\left|2x+\frac{1}{3}\right|\right)\left(\log_{\left|2x+\frac{1}{3}\right|}\left(\frac{1}{3}-x\right)-\right.$$

$$\left.-\log_{\left|2x+\frac{1}{3}\right|}\left(2x+\frac{1}{3}\right)^2\right)>0\Leftrightarrow$$

В ОДЗ, в силу (УР Л12),

$$\left(\left|2x+\frac{1}{3}\right|-1\right)^3\left(\frac{1}{3}-x-\left|2x+\frac{1}{3}\right|\right)\left(\frac{1}{3}-x-4x^2-\frac{4}{3}x-\frac{1}{9}\right)>0 \Leftrightarrow$$

(т. к. в ОДЗ $\frac{1}{3}-x>0$)

$$\Leftrightarrow \left(\left|2x+\frac{1}{3}\right|-1\right)\left(\left|\frac{1}{3}-x\right|-\left|2x+\frac{1}{3}\right|\right)\left(36x^2+21x-2\right)<0\Leftrightarrow$$

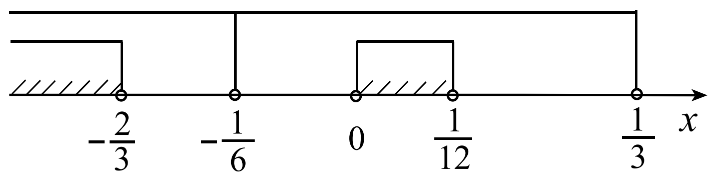
$$\Leftrightarrow \left(2x+\frac{1}{3}-1\right)\left(2x+\frac{1}{3}+1\right)\left(\frac{1}{3}-x-2x-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}-x+2x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{12}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(x+\frac{2}{3}\right)<0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right)^3\left(x-\frac{1}{12}\right)>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right)\cup\left(0;\frac{1}{12}\right)\cup\left(\frac{1}{3};+\infty\right).$$

Учтем ОДЗ



и получаем

Ответ: $\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right)\cup\left(0;\frac{1}{12}\right)$. ♦

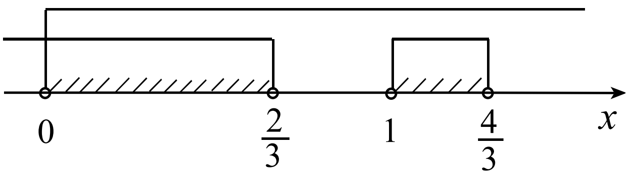
Пример 24. (МФТИ, 1996). Решите неравенство

$$\log_{|3x-3|}\left(25^x-9^x\right)<\log_{|3x-3|}\left(5^x+3^x\right)+\log_{|3x-3|}\left(5^{x-1}+3^{x-1}\right).$$

♦ $\log_{|3x-3|}\left(5^x+3^x\right)\left(5^x-3^x\right)<\log_{|3x-3|}\left(5^x+3^x\right)+\log_{|3x-3|}\left(5^{x-1}+3^{x-1}\right)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |3x-3| \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1, \\ 5^x - 3^x > 0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{5}{3}\right)^x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 0, \\ \left(|3x-3|-1\right)\left(5^x - 3^x - 5^{x-1} - 3^{x-1}\right) < 0 \Leftrightarrow \left(|3x-3|-1\right)\left(\dfrac{4}{5}5^x - \dfrac{4}{3}3^x\right) < 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

В силу (УР М5) и (УР П6),



$$\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ (3x-4)(3x-2)\left(\left(\dfrac{5}{3}\right)^{x-1} - \left(\dfrac{5}{3}\right)^0\right) < 0 \Leftrightarrow \left(x - \dfrac{4}{3}\right)\left(x - \dfrac{2}{3}\right)(x-1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

Ответ: $\left(0; \dfrac{2}{3}\right) \cup \left(1; \dfrac{4}{3}\right)$.