§8. Неравенства вида $a(x)^{f(x)} > a(x)^{g(x)}$

Рассмотрим неравенство $a(x)^{f(x)} > a(x)^{g(x)}$, где $a(x), f(x), g(x)$ – непрерывные функции. ОДЗ: $a(x) > 0$.

Воспользуемся определением сложной экспоненты, взяв в качестве c число e (можно взять любое другое допустимое число). Неравенство принимает вид $e^{f(x)\ln a(x)} > e^{g(x)\ln a(x)}$. Используя (УР П1), получим равносильное неравенство в ОДЗ

$(e-1)(f(x)\ln a(x) - g(x)\ln a(x)) = (e-1)(f(x) - g(x))\ln a(x) > 0,$

а, используя (УР Л5), найдем окончательное равносильное неравенство

$(a(x)-1)(f(x)-g(x)) > 0.$

Итак, мы вывели еще одно условие равносильности

$$\boxed{a(x)^{f(x)} > a(x)^{g(x)} \Leftrightarrow (a(x)-1)(f(x)-g(x)) > 0} \text{ в ОДЗ.} \quad \text{(УР П5)}$$

или полное условие равносильности для строгого неравенства

$$\boxed{a(x)^{f(x)} > a(x)^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a(x) > 0, \\ (a(x)-1)(f(x)-g(x)) > 0. \end{cases}} \quad \text{(УР П5*)}$$

Поэтому

знак разности $a(x)^{f(x)} - a(x)^{g(x)}$ совпадает со знаком произведения $\left(a(x)-1\right)\left(f(x)-g(x)\right)$ в ОДЗ.

(УР П6)

Преимущество (УР П6) состоит в том, что, если $a(x), f(x), g(x)$ – рациональные функции, то за ***ОДИН ШАГ*** мы перешли к классическому варианту метода интервалов.

Пример 18. Решите неравенство

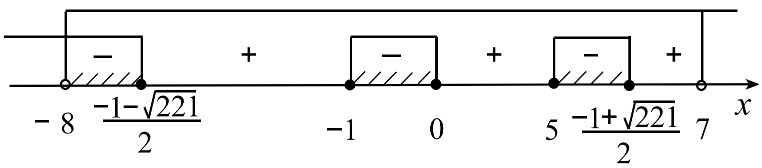
$$\left(56 - x - x^2\right)^{x^3-2x^2} \ge \left(56 - x - x^2\right)^{2x^2+5x}.$$

♦ ОДЗ: $56 - x - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 56 < 0 \Leftrightarrow x \in (-8;7)$.

В ОДЗ, в силу (УР П6), $\left(56 - x - x^2\right)^{x^3-2x^2} \ge \left(56 - x - x^2\right)^{2x^2+5x} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(55 - x - x^2\right)\left(x^3 - 2x^2 - 2x^2 - 5x\right) \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{-1-\sqrt{221}}{2}\right)\left(x - \frac{-1+\sqrt{221}}{2}\right)x(x+5)(x-1) \le 0 \Rightarrow$$



Ответ: $\left(-8; \frac{-1-\sqrt{221}}{2}\right] \cup [-1;0] \cup \left[5; \frac{-1+\sqrt{221}}{2}\right]$. ♦