§3. Показательные уравнения

Из монотонности показательной функции следует, что $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$.

Из свойств показательной функции следует, что, если $a > 0, a \neq 1$, то простейшее показательное уравнение $a^x = b$ при $b \leq 0$ не имеет решения, а при $b > 0$ имеет единственный корень $x = \log_a b$.

Для успешного решения большинства учебных примеров решающим является умение преобразовать исходное уравнение к более простому. Более простыми можно считать два основных уравнения:

1. $a^{f(x)} = b(x) \Leftrightarrow f(x) = \log_a b(x)$,
2. $g\left(a^{f(x)}\right) = 0$.

Уравнение 2 заменой переменной $a^{f(x)} = t$ сводится к уравнению $g(t) = 0$, у которого отыскиваются положительные корни, а затем решаются уравнения типа 1. Заметим, что

$$1^{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow 1 = g(x), \quad 0^{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) = 0; \end{cases}$$

Пример 1. (МГУ, 1970). $4^{\sqrt{3x^2-2x}+1} + 2 = 9 \cdot 2^{\sqrt{3x^2-2x}}$.

♦ $4^{\sqrt{3x^2-2x}+1} + 2 = 9 \cdot 2^{\sqrt{3x^2-2x}} \Leftrightarrow 4 \cdot 2^{2\sqrt{3x^2-2x}} - 9 \cdot 2^{\sqrt{3x^2-2x}} + 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\left(2^{\sqrt{3x^2-2x}}\right)^2 - 9\left(2^{\sqrt{3x^2-2x}}\right) + 2 = 0 \Leftrightarrow \left(2^{\sqrt{3x^2-2x}} - 2\right)\left(2^{\sqrt{3x^2-2x}} - \frac{1}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{3x^2 - 2x} = 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = \dfrac{-1}{3}; \end{array}\right. \\ \sqrt{3x^2 - 2x} = -2 \Leftrightarrow \varnothing. \end{array}\right.$$

© 2005, ЗФТШ при МФТИ. Составитель Колесникова Софья Ильинична.

Ответ. $1, \dfrac{-1}{3}$. ♦

Пример 2. $8^x - 13\cdot 4^x 3^x - 2^x 9^x + 13\cdot 3^{3x} = 0.$

♦ $8^x - 13\cdot 4^x 3^x - 2^x 9^x + 13\cdot 3^{3x} = 0 \Leftrightarrow 2^{3x} - 13\cdot 2^{2x}3^x - 2^x 3^{2x} + 13\cdot 3^{3x} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2^{3x}\left(1 - 13\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^x - \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} + 13\left(\frac{3}{2}\right)^{3x}\right) = 0 \qquad (*)$$

Пусть $\left(\dfrac{3}{2}\right)^x = t > 0$, тогда (*) примет вид $1 - 13t - t^2 + 13t^3 = 0.$

$1 - 13t - t^2 + 13t^3 = 0 \Leftrightarrow \left(1 - t^2\right)\left(1 - 13t\right) = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1; \dfrac{1}{13} \Rightarrow x = 0; -\log_{\frac{3}{2}} 13.$

Ответ: $0, -\log_{\frac{3}{2}} 13$. ♦

Пример 3. $500\cdot 8^x = 8\cdot 5^{\frac{1}{x}}.$

♦ $500\cdot 8^x = 8\cdot 5^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow 5^3 2^2 2^{3x} = 2^3 5^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow 2^{3x-1} = 5^{\frac{1}{x}-3} \Leftrightarrow (3x-1)\log_5 2 = \dfrac{1}{x} - 3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\log_5 2 - 3 \pm \left(\log_5 2 + 3\right)}{6\log_5 2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{3}, \\ x = -\log_2 5. \end{array}\right.$$

Ответ: $\dfrac{1}{3}, -\log_2 5$. ♦

Пример 4. $\dfrac{1}{2^x} + \dfrac{1}{3^x} = 5.$ ♦ Это уравнение удается решить, используя то, что левая часть уравнения является строго убывающей функцией, которая любое положительное значение принимает только один раз. Подбором убеждаемся, что $x = -1$.

Ответ: -1.♦

Пример 5. (МГУ, 1997, псих. ф – т.) При каких действительных p уравнение $4^x + 2^{x+2} + 7 = p - 4^{-x} - 2\cdot 2^{1-x}$ имеет решение?

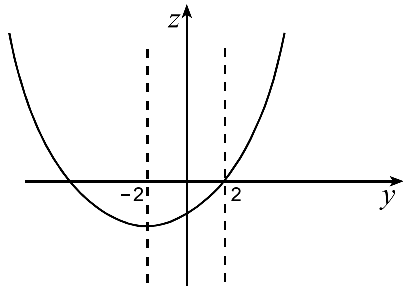
♦ $4^x+4\cdot 2^x+7+\dfrac{4}{2^x}+\dfrac{1}{4^x}-p=0 \Leftrightarrow 4^{2x}+4\cdot 4^x\cdot 2^x+(7-p)\cdot 4^x+4\cdot 2^x+1=0.$

Пусть $t=2^x>0$. Тогда уравнение примет вид

$$t^4+4t^3+(7-p)t^2+4t+1=t^2\left(t^2+4t+(7-p)+\frac{4}{t}+\frac{1}{t^2}\right)=0.$$

Это возвратное уравнение. Оно решается заменой переменных $y=t+\dfrac{1}{t}$, причем $y=\dfrac{t^2+1}{t}=\dfrac{(t-1)^2+2t}{t}=2+\dfrac{(t-1)^2}{t}\geq 2$ для любого $t>0$. Уравнение принимает вид

$$\left(t^2+2+\frac{1}{t^2}\right)+4\left(t+\frac{1}{t}\right)+(5-p)=y^2+4y+(5-p)=0.$$



Так как вершина параболы $z=y^2+4y+(5-p)$ расположена слева от оси z и ветви направлены вверх, то корень $y_0\geq 2$ существует тогда и только тогда, когда $z(2)\leq 0 \Leftrightarrow 4+8+5-p\leq 0 \Leftrightarrow p\geq 17.$

Ответ: $[17;+\infty)$ ♦

© 2005, ЗФТШ при МФТИ. Составитель Колесникова Софья Ильинична.