ЭЛЕМЕНТЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ДИНАМИКИ

§ 5. Введение

К началу XX века накопилось большое количество экспериментальных данных о величине скорости света, и эти данные подвели ученых к неожиданному заключению:

ВО ВСЕХ ИНЕРЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ ОТСЧЕТА
СКОРОСТЬ СВЕТА В ВАКУУМЕ ОДИНАКОВА. (I)

После этого еще в течении нескольких десятилетий экспериментаторы совершенствовали технику и методику измерений, получая значение скорости света со все большей точностью. Наконец в 1983 году на заседании Генеральной конференции по мерам и весам было принято решение считать величину скорости света «c» в вакууме равной 299792458 м/с точно.

Заключение (I) поставило перед научным миром массу задач. В ходе их разрешения была создана новая теория – *специальная теория относительности*, или сокращенно СТО.

В фундаменте СТО лежат два принципа: 1) принцип постоянства скорости света (I); 2) принцип относительности (II). Современная трактовка принципа относительности такова:

ЗАКОНЫ ПРИРОДЫ, ПО КОТОРЫМ ИЗМЕНЯЮТСЯ
СОСТОЯНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ СИСТЕМ,
НЕ ЗАВИСЯТ ОТ ТОГО, К КАКОЙ (II)
ИНЕРЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ ОТСЧЕТА
ОТНОСЯТСЯ ЭТИ ИЗМЕНЕНИЯ.

§ 6. Основное соотношение релятивистской динамики

Поскольку скорость света постоянна в любой инерциальной системе отсчета (ИСО), логично выражать все другие скорости перемещения не в привычных нам единицах, например, метрах за секунду, а в долях от величины «c». Особенно удобно такое обозначение для скоростей, соизмеримых со скоростью света. Итак, определим безразмерную скорость так:

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{\upsilon}}{c}. \tag{6.1}$$

Обозначим символом E полную энергию исследуемого нами материального объекта, а символом $\vec{p}$ – его импульс. Стрелка над значком p означает, что импульс – векторная величина.

Оказывается, между импульсом и энергией существует простая связь:

$$\vec{p} = \vec{\beta}\frac{E}{c}. \tag{6.2}$$

По известному импульсу и энергии объекта можно легко определить его массу:

$$m = \frac{1}{c^2}\sqrt{E^2 - (c\vec{p})^2}. \tag{6.3}$$

В физике элементарных частиц импульс и массу удобно выражать в энергетических единицах. Импульс, выраженный в этих единицах, следует представить в виде $c\vec{p}$. Тогда формула (6.2) примет вид

$$c\vec{p} = \vec{\beta}E. \tag{6.4}$$

Аналогичным образом, масса записывается как mc^2, а формула (6.3) принимает вид

$$mc^2 = \sqrt{E^2 - (c\vec{p})^2}. \tag{6.5}$$

В дальнейшем мы, как правило, будем пользоваться именно таким представлением импульса и массы.

Для объектов, находящихся в состоянии покоя, $\beta = 0$. Следовательно, равен нулю и импульс (смотри (6.4)). Обозначая энергию покоящегося тела символом E_0, мы из формулы (6.5) получим

$$mc^2 = E_0. \qquad (6.6)$$

Подчеркнем, что здесь масса m имеет такой же смысл, как и в ньютоновой механике, т.е. ее величина не зависит от выбора ИСО[1)].

Для изучения последующего материала введем еще два определения:

1) кинетической энергией $E_{\text{êèí}}$ движущегося объекта будем называть разницу между его полной энергией и энергией покоя:

$$E_{\text{êèí}} = E - E_0. \qquad (6.7)$$

В задаче №6 мы покажем, что при малых скоростях это выражение совпадает с классической формулой для кинетической энергии;

2) релятивистским фактором (или Лоренц-фактором) называется коэффициент γ, показывающий во сколько раз энергия движущегося тела больше его энергии покоя.

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (6.8)$$

Само собой разумеется, что всегда $\gamma \geq 1$.

Примечание. Релятивистский фактор определен только для объектов, обладающих массой.

Задача 5. Докажите, что β и γ взаимозависимые величины.

Решение. Подставим (6.4) и (6.6) в (6.5).

$$E_0^2 = E^2 - (\vec{\beta}E)^2 \quad \Rightarrow \quad E^2(1-\vec{\beta}^2) = E_0^2, \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{E}{E_0}\right)^2 = \frac{1}{1-\vec{\beta}^2}.$$

Поскольку $\vec{\beta}^2 = \beta^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{1}{1-\beta^2}, \qquad (6.9)$$

что и требовалось доказать.

В дальнейшем, для избежания громоздких формул, мы часто будем использовать символ γ, определенный согласно (6.8) или (6.9).

Задача 6. Докажите, что при малых скоростях $(\beta << 1)$ формула (6.7) переходит в классическое выражение для кинетической энергии.

Примечание. В математике есть формулы для приближенного вычисления алгебраических выражений, содержащих малый параметр. Так, для чисел $x << 1$ и действительных a, таких что $ax << 1$, применима формула

$$(1+x)^a \approx 1 + ax. \qquad (6.10)$$

(Убедитесь в ее справедливости на придуманных вами численных примерах.)

Решение. $E_{\text{кин}} = E - E_0 = \gamma E_0 - E_0 = (\gamma - 1)E_0$. Согласно формулам (6.9) и (6.10)

$$\gamma - 1 = (1-\beta^2)^{-1/2} - 1 \approx \left(1 + \frac{\beta^2}{2}\right) - 1 = \frac{\beta^2}{2}.$$

Отсюда

$$E_{\text{кин}} \approx \frac{\beta^2}{2}E_0 = \left(\frac{\upsilon}{c}\right)^2 \frac{mc^2}{2} = \frac{m\upsilon^2}{2}. \qquad (6.11)$$

В заключение заметим, что энергии, с которыми приходится иметь дело в микромире, столь малы, что если их измерять в знакомых вам джоулях, придется использовать множители, содержащие более десяти нулей. Поэтому были придуманы специальные единицы – электрон-вольты (сокращенно эВ). Известно, что свободный минимальный заряд, встречающийся в природе, равен заряду электрона $(e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{Кл})$. Частица с таким зарядом, преодолев разность потенциалов в один вольт, изменит свою энергию на 1эВ. Следовательно,

1) Введенное нами понятие массы совпадает с определением массы покоя, но поскольку никаких других понятий массы мы не вводим, индекс «0» у символа массы не нужен.

$1\,эВ = 1{,}6\cdot 10^{-19}$ Дж. Кинетическая энергия «внешних» электронов в атоме обычно не превышает двух десятков электрон-вольт. Такую же энергию необходимо затратить на то, чтобы «оторвать» от атома эти электроны.

§ 7. Законы сохранения

Начнем с *энергии*.

а) В любой ИСО энергия некоторой совокупности частиц (тел, объектов), не взаимодействующих на расстоянии как между собой, так и с внешним миром, равна сумме энергий всех частиц, входящих в эту совокупность.

$$E_{сист} = \sum_i E_i \,. \tag{7.1}$$

Величины, подчиняющиеся такому правилу, называются *аддитивными* (от латинского слова additivus – прибавляемый).

Во всем диапазоне скоростей исследуемых материальных объектов выполняется закон сохранения энергии. Иными словами, если мы сравним энергию системы частиц до и после их взаимодействия (под взаимодействием мы здесь понимаем упругие столкновения, распад), то оказывается справедливым следующее равенство:

$$\sum_{i=1}^{N_1} E_i = \sum_{k=1}^{N_2} E_k' \tag{7.2}$$

Здесь N_1 – число частиц до взаимодействия, N_2 – после него. Вообще говоря, N_1 может отличаться от N_2.

Заметим, что в общем случае необходимо учитывать еще и потенциальную энергию U их взаимодействия. Например, энергия системы двух заряженных частиц

$$E_{сист} = E_1 + E_2 + U_{12} \,. \tag{7.3}$$

Перейдем к *импульсу*.

а) Импульс, как и энергия, обладает свойством аддитивности, т.е. импульс системы частиц равен векторной сумме импульсов частиц, входящих в эту сумму:

$$\vec{p}_{сист} = \sum_i \vec{p}_i \,. \tag{7.4}$$

б) Закон сохранения импульса имеет такой же вид как и в классической физике:

$$\sum_{i=1}^{N_1} \vec{p}_i = \sum_{k=1}^{N_2} \vec{p}_k' \,. \tag{7.5}$$

§ 8. Дефект массы

Обычно у учащихся после изучения школьного курса физики создается впечатление, что дефект массы наблюдается только в ядерных или термоядерных реакциях. Это не так!

Дефект массы – самое заурядное и распространенное явление.

Задача7. Ученик ЗФТШ наливает в чайник из водопроводного крана 2 литра воды $\left(t-14^{\circ}C\right)$ ставит его на плиту и доводит до кипения. Предположим, что испарения не происходит. На сколько изменится масса воды в чайнике?

Решение. Согласно (6.5) $mc^2=\sqrt{E^2-(c\vec{p})^2}$, а т.к. $\vec{p}=0$ (центр масс воды как до, так и после нагрева покоится), то $mc^2=E$. Во время нагрева воды ей была передана дополнительная энергия $\Delta E=mc_{\text{в}}\Delta T$, где $c_{\text{В}}$ = 4.186 кДж/(кг·С)– удельная теплоемкость воды. Тогда $\Delta mc^2=\Delta E$, или для относительного увеличения массы

$$\frac{\Delta m}{m}=\frac{c_{â}\Delta T}{c^2}\quad\Rightarrow\quad\frac{\Delta m}{m}=\frac{4{,}186\cdot10^3\cdot86}{(3\cdot10^8)^2}=4\cdot10^{-12}=4\cdot10^{-10}\%.$$

Для атомного ядра дефект массы дается формулой

$$\Delta m_{\text{сист}}=\left(Zm_{\text{p}}+Nm_{\text{n}}\right)-m(Z,N).\qquad(8.1)$$

где m_{p}, m_{n} и $m(Z,N)$ – масса протона, нейтрона и атомного ядра соответственно. Z и N – число протонов и нейтронов в атомном ядре.

Задача 8. Докажите, что масса атома водорода меньше суммы масс составляющих его протона и электрона. Считать, что скорость электрона в атоме мала $(\beta<<1)$.

Решение. Атом водорода – это связанная система. Согласно (6.5) и (7.3)

$$(E_{\text{p}}+E_{\text{e}}+U)^2-(c\vec{p}_{\text{p}}+c\vec{p}_{\text{e}})^2=(m_{\text{H}}c^2)^2.$$

Здесь E_{p} – энергия протона, E_{e} – энергия электрона, а m_{H} – масса атома водорода.

По условию задачи атом водорода можно считать покоящимся, т.е. $c\vec{p}_{\text{p}}+c\vec{p}_{\text{e}}=0$. Из этих формул следует $E_{\text{p}}+E_{\text{e}}+U=m_{\text{H}}c^2$, или с учетом (6.7),

$$m_{\text{p}}c^2+E_{\text{кин(p)}}+m_{\text{e}}c^2+E_{\text{кин(e)}}+U=m_{\text{H}}c^2.\qquad(8.2)$$

Поскольку $\beta<<1$, кинетическая энергия каждой из частиц может быть вычислена по классической формуле. Поскольку

$$\frac{\mathrm{E}_{\text{кин(p)}}}{\mathrm{E}_{\text{кин(e)}}}=\frac{m_{\text{e}}}{m_{\text{p}}}\approx5\cdot10^{-4}<<1,\qquad(8.3)$$

кинетической энергией протона можно пренебречь. Дефект массы атома водорода $\Delta m=(m_{\text{p}}+m_{\text{e}})-m_{\text{H}}$. Тогда с учетом условия (8.3) формулу (8.2) можно представить в виде

$$\Delta mc^2=-U-E_{\text{кин(e)}}.\qquad(8.4)$$

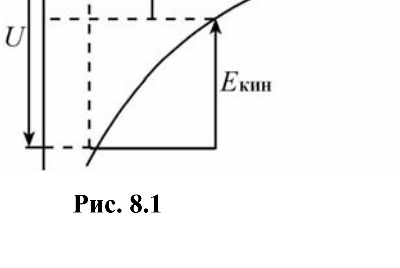

Рис. 8.1

Величина $E_{\text{св}}=-U-E_{\text{кин(e)}}$ называется энергией связи электрона с ядром (рис. 8.1). Численно она равна энергии, которую нужно затратить на ионизацию атома водорода.

Потенциальная энергия атома водорода обусловлена кулоновским взаимодействием электрона с протоном. Она отрицательна и может быть найдена по известной формуле:

$$U = -k\frac{e^2}{r}. \qquad (8.5)$$

В этих же обозначениях закон Кулона имеет вид

$$F = k\frac{e^2}{r^2}.$$

Здесь e – модуль заряда электрона или протона, а k – коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора системы единиц.

Предположим, что электрон движется по круговой орбите радиуса r. Его центростремительное ускорение обеспечивается кулоновским притяжением:

$$m_{\text{е}}\frac{\upsilon^2}{r} = k\frac{e^2}{r^2}.$$

Последнюю формулу легко привести к виду

$$2\left(\frac{m_{\text{е}}\upsilon^2}{2}\right) = k\frac{e^2}{r}. \qquad (8.6)$$

С учетом (8.5) получается

$$2E_{\text{кин(е)}} = -U. \qquad (8.7)$$

Подстановка (8.7) в (8.4) даст $\Delta mc^2 = E_{\text{кин}}$ или с учетом (6.11)

$$\Delta m\tilde{n}^2 = \frac{m_e\upsilon^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \Delta m = \frac{m_e\beta^2}{2}. \qquad (8.8)$$

Примечание. В дальнейшем мы покажем, что максимальная скорость электрона, движущегося по круговой орбите в атоме водорода, равна $\beta = 1/137$, откуда $\dfrac{\Delta m}{m_e} \approx 2\cdot 10^{-5} = 2\cdot 10^{-3}\%$.