

ФИЗИЧЕСКАЯ ОПТИКА

§ 1. Введение

В 1993 году на вступительных экзаменах в МФТИ абитуриентам была предложена следующая задача.

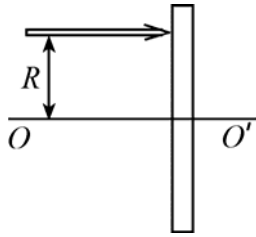


Рис. 1.1

Задача 1. На стеклянную плоскопараллельную пластинку толщиной $H = 3$ мм падает узкий пучок монохроматического света (рис. 1.1). Пучок параллелен оптической оси OO' , которая перпендикулярна пластинке и проходит через ее центр. Расстояние между пучком и осью OO' равно $R = 3$ см. Показатель преломления стекла для падающего на пластинку света имеет радиальную зависимость:

$$n(r) = n_0 \left[1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right], \quad (1.1)$$

где n_0 и r_0 – постоянные ($n_0 = 1,5$, $r_0 = 9$ см). Определить угол между выходящим пучком и осью OO' . (МФТИ, 1993)

Большая часть абитуриентов при решении этой задачи рассуждала примерно так: «Выделим небольшой участок пластинки в окрестности вошедшего в нее светового пучка. Пластинку можно рассматривать как слоистую среду с показателем преломления, медленно меняющимся от слоя к слою. Поскольку световые лучи параллельны, то вдоль пути любого из лучей показатель преломления не меняется, а следовательно, не отклоняется и луч».

Увы! Эти рассуждения ошибочны.

В данной задаче мы столкнулись с ситуацией, когда понятие светового луча в той формулировке, которую мы дали в предыдущем задании, требует уточнения.

Оказывается, свет имеет *двойственную* природу. Его можно рассматривать не только как поток частиц (фотонов), но и как систему распространяющихся *электромагнитных волн*. Для видимого света частота изменения поля в такой волне лежит в пределах от $0,38 \cdot 10^{15}$ Гц до $0,86 \cdot 10^{15}$ Гц.

При переходе света из воздуха в стекло происходит изменение длины световой волны (волновое возмущение). Назовем границу волнового возмущения *волновым фронтом* (ВФ). Согласно принципу Гюйгенса, каждая точка ВФ сама становится источником сферической волны. Эти вновь образовавшиеся волны называются вторичными или элементарными. Огибающая, проведенная по границе вторичных волн, дает новое положение ВФ. Таким образом, можно воспроизводить ВФ в самых удаленных точках пространства. В любой точке ВФ можно построить нормаль к нему. Она-то (нормаль) и является образом *светового луча*, моделью, позволяющей следить за распространением участка ВФ.

Решение. До известной степени можно следовать логике абитуриентов, приведенной на стр. 3. Допустим, что в пластинке лучи 1 и 2 распространяются параллельно главной оптической оси. На прохождение сквозь нее лучом потребуется время $t_1 = H/v_1 = Hn_1/c$ и $t_2 = Hn_2/c$ соответственно.

Поскольку $n_2 > n_1$, то $t_2 > t_1$. Значит, в то время $\Delta t = t_2 - t_1$, которое луч 2 будет заканчивать свой путь в пластинке, луч

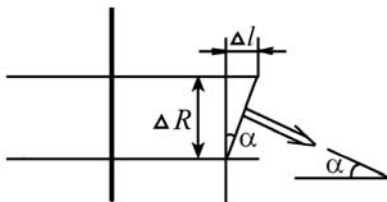


Рис. 1.2

пойдет в воздухе расстояние

$$\Delta l = c\Delta t = H(n_2 - n_1) \cong H \left(\frac{dn}{dr} \right)_{r=R} \Delta R, \quad (1.2)$$

где Δr – ширина светового пучка.

Теперь пора вспомнить об определении волнового фронта. На выходе из пластинки он отклонится вниз, к главной оптической оси, на угол $\alpha \approx \frac{\Delta l}{\Delta r}$ (см. рис. 1.2). С учетом (1.2) получим

$$\alpha = H \left(\frac{dn}{dr} \right)_{r=R} = 2n_0 H \frac{R}{r_0^2} \approx \frac{1}{30} \text{ рад}.$$

В заключении введения обсудим границы применимости приближения геометрической оптики. В ряде учебников в качестве условия применимости этого приближения приводят неравенство:

$$D \gg \lambda, \quad (1.3)$$

где D – характерный поперечный размер оптических элементов, λ – длина волны. Рассмотрим простейший случай. Пусть на диафрагму диаметра D падает плоская волна монохроматического излучения с длиной волны λ . В этом случае за диафрагмой волна станет расходящейся из-за дифракции на диафрагме, причем угол расходимости

$$\theta \approx \frac{\lambda}{D}. \quad (1.5)$$

Введем расстояние r_0 так, что

$$r_0 \cdot \theta = D. \quad (1.6)$$

На этом расстоянии за диафрагмой ширина пучка удвоится. Из (1.5) и (1.6) следует:

$$r_0 = \frac{D^2}{\lambda}. \quad (1.7)$$

На расстоянии $r > r_0$ приближение геометрической оптики заведомо не работает. В случае если $r \ll r_0$ – этим приближением можно пользоваться.

§ 2. Плоские и сферические волны

Рассмотрим плоскую синусоидальную волну, проходящую через фиксированную точку пространства. Пусть $A(t)$ – текущее отклонение высоты волны от ее среднего значения. Эта величина может быть описана с помощью уравнения

$$A(t) = A_0 \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (2.1)$$

где A_0 – амплитуда волны, φ_0 – ее фаза, соответствующая началу отсчета времени t , а ω – круговая частота, связанная с обычной (циклической) частотой f соотношением $\omega = 2\pi f$.

Если бы в некий момент времени t_1 удалось остановить волну («вморозить» ее в пространство), то в каждой фиксированной точке пространства отклонение волны A от среднего уровня стало бы постоянным, но изменялась бы при переходе от одной точки пространства к другой.

Предположим для определенности, что исследуемая нами электромагнитная волна распространяется вдоль оси x . Тогда, смещаясь в положительном направлении оси x вдоль «замороженной» волны, мы обнаружим закономерность изменения высоты волны:

$$A(x) = A_0 \sin(\omega t_1 \varphi_0 - kx), \quad (2.2)$$

где $k = 2\pi / \lambda$ – пространственная частота (часто параметр k называют волновым числом), λ – длина волны, а kx – набег фазы на длине x .

«Разморозим» волну. Для произвольной точки оси x и произвольного момента времени t высота волны будет определяться уравнением

$$A(x, t) = A_0 \sin(\omega t - kx + \varphi_0). \quad (2.3)$$

Математическое представление сферической волны отличается от такового для плоской тем, что у сферической волны амплитуда зависит от расстояния до

источника самой этой волны: $A(r) = \frac{C}{r}$, где r – расстояние от источника до точки наблюдения, а C – постоянная величина, определяемая из начальных условий задачи.

Следует также иметь в виду, что соответствующим выбором начала отсчета времени можно избавиться от начальной фазы φ_0 или в уравнении (2.3) перейти от функции \sin к функции \cos .

С учетом сказанного выше уточним понятие волнового фронта (ВФ) и дадим его строгое определение.

Волновым фронтом называется воображаемая поверхность, во всех точках которой волна имеет в фиксированный момент времени одинаковую фазу.

§ 3. Сложение амплитуд колебаний одной частоты

Мы не станем решать задачу о сложении колебаний в общем виде, а рассмотрим лишь один частный случай, когда суммируемые волны распространяются вдоль общей оси и имеют одинаковые амплитуды. Кроме того, будем считать, что точка наблюдения и источники обеих волн неподвижны или, по крайней мере, скорость их движения много меньше скорости распространения самих волн. Тогда слагаемые $\varphi_0 - kx$ в выражении (2.3) можно заменить новыми значениями фазы. При этом амплитуда суммарной волны будет равна

$$A_{\text{общ}}(t) = A \sin(\omega t + \varphi_1) + A \sin(\omega t + \varphi_2).$$

По известной из тригонометрии формуле для суммы синусов получим:

$$A_{\text{общ}}(t) = 2A \cos\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) \sin\left(\omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right). \quad (3.1)$$

Легко видеть, что амплитуда результирующей волны определяется следующим образом:

$$A_0 = 2A \cos\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right), \quad (3.2)$$

и в зависимости от разности фаз $(\varphi_2 - \varphi_1)$ может изменяться в пределах от нуля до $2A$.

Хорошенько запомните формулу (3.2). Ее важность вы по достоинству оцените при решении задач этого задания.

Задача 2. Для уменьшения доли отраженного света от поверхности стекла на нее наносят тонкую пленку, показатель преломления которой меньше показателя преломления стекла (т.н. просветление оптики). Пусть на стекло падает излучение двух длин волн с $\lambda_1 = 700$ нм и $\lambda_2 = 420$ нм. Какой наименьшей толщины h пленку с показателем преломления $n = 4/3$ надо нанести на поверхность стекла, чтобы при падении (нормально к поверхности) лучей, отраженный свет был максимально ослаблен для обеих длин волн?

Решение. Согласно формуле (3.2), амплитуда отраженного сигнала будет минимальной, если для лучей, отраженных от верхней и от нижней поверхностей пленки, будет выполняться соотношение

$$2A \cos\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) = 0,$$

что эквивалентно условию $\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} = \frac{\pi}{2} + m\pi$, где m – целое число.

Разность фаз $\varphi_2 - \varphi_1 = kx$ (см. комментарий к формуле (2.2)). В данном случае $x = 2h$ (ход волн сквозь пластинку туда и обратно).

Так как падающий свет состоит из излучения на двух длинах волн, необходимо погасить обе отраженные волны.

$$\begin{cases} k_1 h = \frac{2\pi}{\lambda_{\text{стекло}}} = \frac{\pi}{2} + m_1 \pi, \lambda_{\text{стекло}} = \frac{\lambda_1}{n}, \\ k_2 h = \frac{2\pi}{\lambda_{\text{стекло}}} = \frac{\pi}{2} + m_2 \pi, \lambda_{\text{стекло}} = \frac{\lambda_2}{n}. \end{cases} \quad (3.3)$$

Решая эту систему, получим:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{m_2 + 0,5}{m_1 + 0,5}. \quad (3.4)$$

С другой стороны,

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{700 \text{ нм}}{420 \text{ нм}} = \frac{5}{3}. \quad (3.5)$$

Из (3.4) и (3.5) следует $5m_1 + 1 = 3m_2$. Наименьшие m_1 и m_2 , для которых выполняется это равенство, таковы: $m_1 = 1$, $m_2 = 2$. Отсюда находим h (можно использовать любое из двух уравнений системы (3.3)):

$$h \approx 394 \text{ нм}.$$

§ 4. Интерференция волн

Определение. Под *интерференцией* волн понимают взаимное усиление или ослабление двух (или большего числа) волн при их одновременном распространении в пространстве. В самом деле, при наложении волн их общая амплитуда определяется формулой (3.2), а интенсивность суммарной волны пропорциональна квадрату амплитуды ($I \sim A^2$) и не равна сумме интенсивностей исходных волн. Этот результат противоречит постулату №3 геометрической оптики. Более того, в физической (волновой) оптике не выполняется и постулат №1 (стр. 3 задания 5).

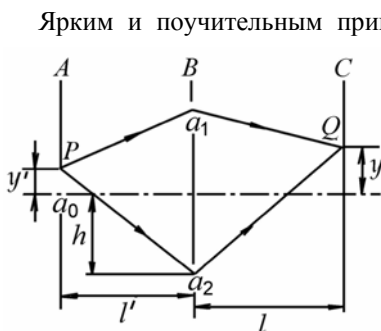


Рис. 4.1

Ярким и поучительным примером интерференции волн может служить *опыт Юнга*. На примере этого опыта становится ясно, почему так сложно обнаружить интерференцию световых волн в обычных жизненных ситуациях. Схема опыта приведена на рис. 4.1. Свет от монохроматического источника освещает щель a_0 на экране A . Длинная сторона щели перпендикулярна плоскости рисунка. Интерференционная картина наблюдается на экране C .

Между точками A и C расположен экран

B с двумя щелями a_1 и a_2 , параллельными щели a_0 и симметрично отстоящими от оси системы на расстояние h . Расстояние между экранами A и B равно l' , а между B и C – l . Рассмотрим, что будет происходить со световыми волнами в этой установке. Возьмем какую-либо точку P щели на экране A , находящуюся на расстоянии y' от оси установки. Посмотрим, какое возмущение создает свет, исходящий из точки P в некоторой точке Q экрана C , находящейся на расстоянии y от оси системы. *Разность хода* ΔS в лучах света, пришедших в точку Q через щели a_1 и a_2 , равна

$$\Delta S = (Pa_2 + a_2Q) - (Pa_1 + a_1Q).$$

Как нетрудно убедиться,

$$(Pa_1)^2 = l'^2 + (h - y')^2, \quad (Pa_2)^2 = l'^2 + (h + y')^2.$$

Отсюда

$$(Pa_2)^2 - (Pa_1)^2 = 4hy' \quad \text{или} \quad (Pa_2 + Pa_1)(Pa_2 - Pa_1) = 4hy'.$$

Если мы предположим, что $y' \ll l'$ и $h \ll l'$, а правомерность такого предположения (и с большим запасом) будет очевидна из дальнейшего, то первую

сумму в последнем равенстве мы смело можем положить равной $2l'$. Тогда $(Pa_2 - Pa_1) = 2hy'/l'$. Аналогично найдем и $(a_2Q - a_1Q)$.

$$\Rightarrow \Delta S = \frac{2hy'}{l'} + \frac{2hy}{l}. \quad (4.1)$$

В точке Q будет наблюдаться максимум интерференционной картины, если разность хода ΔS составляет целое число длин волн (см. формулу (3.2)). Минимум интерференционной картины будет наблюдаться тогда, когда эта разность равна

$$(2m + 1) \frac{\lambda}{2}, \text{ где } m \text{ – любое целое число, включая и } 0.$$

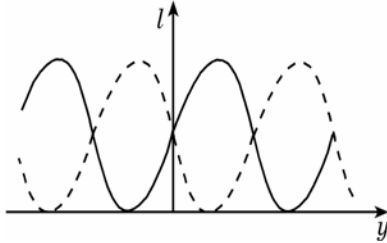


Рис. 4.2

Если мы будем перемещать по экрану C точку наблюдения Q (при неизменном положении P), то получим картину освещенности на экране C примерно такого вида, как показано сплошной кривой на рис. 4.2. То есть на

экране C будет наблюдаться система равноотстоящих друг от друга (эквидистантных) полос. Расстояние d между этими полосами найдем из (4.1):

$$\lambda = \frac{2hd}{l} \Rightarrow d = \frac{l\lambda}{2h}. \quad (4.2)$$

Формула (4.2) может быть представлена в виде

$$d = \frac{\lambda}{\Omega}, \quad (4.3)$$

где Ω – угол, под которым из точки экрана, в которой наблюдается интерференция, видны источники интерференционного излучения. В опыте Юнга под таким углом видны отверстия в экране B из центральной точки экрана C :

$$\Omega = \frac{2h}{l}.$$

Посмотрим, что произойдет с этой картиной, если мы сместим точку P на некоторое расстояние $\delta y'$. Как нетрудно видеть из (4.1), соответствующая точка картинки (т.е. точка, для которой разность хода ΔS остается неизменной) сместится на расстояние δy , определяемое соотношением

$$\frac{\delta y'}{l'} = -\frac{\delta y}{l}.$$

В частности, для того, чтобы на экране C точка максимума интенсивности (см. рис. 4.2) оказалась на месте минимума, т.е. на расстоянии $\delta y = \frac{\lambda l}{4h}$, нужно сместить точку P на расстояние

$$\delta y' = -\frac{l'}{l} \delta y = -\frac{l'\lambda}{4h} = \Delta. \quad (4.4)$$

Из (4.2) и (4.4) следует, что если щель на экране A будет иметь ширину ну $D \geq \Delta$, то на экране C каждая точка входной щели даст свою интерференционную картину, и все они разместятся между сплошной и пунктирной линиями (см. рис. 4.2). Таким образом, на экране C вместо интерференционной картины появится область с равномерной засветкой. Следовательно, максимальная ширина входной щели, при которой исчезает интерференционная картина, тем больше, чем меньше расстояние между щелями на экране B и чем больше расстояние между экранами.

Сделаем некоторые оценки. Для видимого света с длиной волны $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ см положим $l = l' = 2$ м, а $2h = 1$ мм. Тогда $\Delta = 5 \cdot 10^{-2}$ см = 0,5 мм. То есть при вполне приличных размерах всей установки (порядка 4 метров) и минимальном

расстоянии между щелями на экране B порядка 1 миллиметра (сами щели, естественно, еще меньше), интерференционная картина исчезает уже при размерах щели на экране A приблизительно равных 0,5 мм. Кроме того, приведенные оценки убеждают нас в правомочности использованного приближения $Pa_1 + Pa_2 = 2l$.

Предложенные выше оценки помогают понять, почему в обычных условиях так нелегко наблюдать интерференционные явления. Но и это еще не все. Масштаб «гребенки» интерференционных полос на рис. 4.2 определяется при прочих равных условиях длиной волны света. Но если источник света *не* строго *монохроматичен*, то для разных длин волн масштабы этих «гребенок» будут различны, и рано или поздно максимум интерференционной картины для одной длины волны придется на минимум другой. А это означает, что в этом месте интерференционная картина исчезает.

Полученные результаты легко обобщить на любые другие двухлучевые интерференционные установки.

В качестве иллюстрации рассмотрим следующую задачу.

Задача 3. Точечный монохроматический источник света S равномерно движется параллельно плоскости, в которой имеются два маленьких отверстия на расстоянии a друг от друга; расстояние от траектории источника до плоскости равно l' (рис. 4.3). Приемник света A расположен на оси системы и регистрирует периодически изменяющуюся освещенность. Определите скорость v движения источника S , если частота колебаний интенсивности $f = 15$ Гц. Длина волны $\lambda = 6 \cdot 10^{-7}$ м, $a = 2$ мм, $l' = 1$ м. Во время измерения источник движется вблизи оси системы.

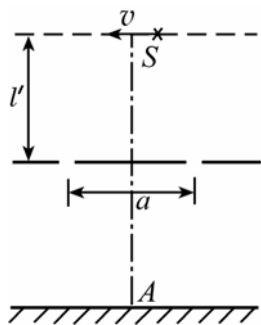


Рис. 4.3 (МФТИ, 1981)

Решение. Период T колебаний интенсивности света в приемнике A равен $T = 1/f$. За время T источник S сместится на расстояние $\delta y' = vT$. При этом интерференционная картина сдвинется на ширину одной полосы, т.е. на величину $\delta y = d$. Согласно (4.4) $d = \lambda/\Omega$. Если через l обозначить расстояние от плоскости до приемника, то $\Omega = a/l$. Таким образом, используя (4.3), получим

$$vT = -\frac{l' \lambda}{l \Omega} = -\frac{l' \lambda l}{l a} = -\frac{l' \lambda}{a}.$$

Откуда $v = -\frac{l' \lambda f}{a}$.

Знак «минус» указывает на то, что интерференционная картина смещается в сторону, противоположную направлению движения источника S . Модуль скорости v равен $|v| = 4,5 \cdot 10^{-3}$ м/с.

Задача 4. Интерферометр Рэлея используется для точного измерения зависимости показателя преломления газов от давления по смещению интерференционной картины. Для этого на пути одного из интерференционных лучей ставится кювета Γ прямоугольной формы длиной $L = 10$ см с исследуемым газом (рис. 4.4), а на пути другого – стеклянный компенсатор K , с помощью которого добиваются, чтобы в центре интерференционной картины разность хода между интерферирующими лучами равнялась нулю. Какое минимальное изменение показателя преломления Δn можно измерить в таком приборе? Считать, что минимальное надежно регистрируемое смещение интерференционной картины в плоскости наблюдения P соот-

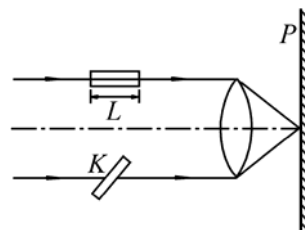


Рис. 4.4

ветствует появлению на месте центрального максимума первого минимума. Наблюдение ведется на длине волны $\lambda = 0,6$ мкм. (МФТИ, 1991)

Решение. Изменение фазы луча, на пути которого стоит кювета, равно

$$\Delta\varphi = \Delta n L k .$$

Условие появления на месте центрального максимума первого минимума, согласно (3.2), есть

$$\frac{\Delta\varphi}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \Delta\varphi = \pi$$

или

$$\frac{2\pi}{\lambda} \Delta n L = \pi \Rightarrow \Delta n = \frac{\lambda}{2L} \Rightarrow \Delta n = \frac{0,6 \cdot 10^{-6} \text{ м}}{2 \cdot 0,1 \text{ м}} = 3 \cdot 10^{-6} .$$