Контрольные вопросы

1(2). Существуют ли такие действительные числа x и y, для которых числа $z_1 = 8x^2 + 20i^{13}$ и $z_2 = 9x^2 - 4 + 10yi^3$ являются сопряженными.

2(2). Существуют ли такие комплексные числа z_1 и z_2, $z_1 \neq z_2$, для которых $z_1 + \dfrac{1}{z_1} = z_2 + \dfrac{1}{z_2}$?

3(2). Сколько решений имеет уравнение

$$z^2 + |z|^2 = 0\,?$$

4(2). Сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} |z - 1 + i| = \sqrt{2}, \\ |z| = 3\,? \end{cases}$$

5(6). Является ли тригонометрической формой числа $\sqrt{3} + i$ следующие выражения

а) $2\left(\cos\dfrac{13\pi}{6} + i\sin\dfrac{13\pi}{6}\right)$;

б) $2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)$;

в) $-2\left(\cos\dfrac{7\pi}{6} + i\sin\dfrac{7\pi}{6}\right)$

(ответ обосновать)?

6(4). Найдите остаток от деления многочлена $z^{100} - 2z^{51} + 1$ на $z^2 - 1$.

Задачи

1(4). Запишите z в алгебраической форме, если

а) $z = \dfrac{3 + i}{(1 - i)^2} + \dfrac{i(4 - i)}{1 - 2i}$;

б) $z = \dfrac{(3 - i)(1 + 2i) + 6i}{(1 + i)^2 + 2 - 8i}$.

2(4). Запишите решение системы в алгебраической форме

а) $\begin{cases} z_1 + z_2 = 4, \\ z_1 + iz_2 = 2i; \end{cases}$ б) $\begin{cases} z_1 + 8iz_2 = 1, \\ iz_1 + z_2 = i + 5. \end{cases}$

3(8). Запишите z в тригонометрической форме, если

а) $z = -\cos\dfrac{\pi}{9} - i\sin\dfrac{\pi}{9}$;

б) $z = (1 + i)^4\left(-1 + i\sqrt{3}\right)^4$;

в) $z = \dfrac{(1 - i)^6}{(1 + i)^6}$;

г) $z = \dfrac{\left(\sqrt{3} - i\right)^6}{\left(1 + i\sqrt{3}\right)^4}$.

4(6). Запишите z в алгебраической и тригонометрической форме, если

$$z = \left(\sin\frac{6\pi}{5} + 1 + i\cos\frac{6\pi}{5}\right)^5.$$

5(6). Какое множество точек комплексной плоскости задается условием а) $|z+1-i|=1$;

б) $|z-i|>|z-2i|$;

в) $|z|^2-|z-6=0;|$

г) $\cos|z|=1$;

д) $\sin|z|=0$;

е) $1<z\cdot\bar{z}\le 3,\ \operatorname{Re} z<0,\ \operatorname{Im} z\ge 2$.

6(6). Решите уравнение

а) $2z^2+(2+i)z+1-i=0$;

б) $iz^2+(2i-3)z-6=0$.

7(8). Решите уравнение

а) $z^6+2z^3+1=0$;

б) $z^8-6z^2+9=0$.

8(10). Представьте многочлен $P(z)$ в виде произведения многочленов первой и второй степени с действительными коэффициентами, если

а) $P(z)=z^6-4z^5-2z^3+35z^2+6z-36$;

б) $P(z)=z^4+z^2+1$;

в) $P(z)=z^4+16$.

9(5). Некоторый многочлен при делении на $(z-1)$ дает остаток 2, при делении на $(z-2)$ дает остаток 1, при делении на z дает остаток -4. Найдите остаток от деления этого многочлена на $z(z-1)(z-2)$.

10(4). Решите уравнение

$$z^4+3z^3+5z^2-12z-36=0.$$