§ 2. Геометрическое изображение комплексных чисел. Модуль и аргументы комплексного числа

1. Комплексная плоскость. Рассмотрим прямоугольную систему координат на плоскости. Каждому комплексному числу $z = a + ib$ поставим в соответствие точку $M(a,b)$ координатной плоскости, т.е. точку, абсцисса которой равна $\operatorname{Re} z = a,$ а ордината равна $\operatorname{Im} z = b.$ Обратно, каждой точке плоскости с координатами (a,b) поставим в соответствие комплексное число $z = a + ib$.

Таким образом, построено взаимно однозначное соответствие между множеством комплексных чисел и точками плоскости, на которой выбрана система координат. Сама координатная плоскость называется при этом *комплексной плоскостью*. Ось абсцисс называется *действительной осью*, т.к. на ней расположены точки, соответствующие комплексным числам $a + i0$, т.е. соответствующие действительным числам. Ось ординат называется *мнимой осью* – на ней лежат точки, соответствующие мнимым комплексным числам $0 + bi.$

Не менее важной и удобной является интерпретация комплексного числа $a + bi$ как вектор $\overrightarrow{OM}$ (см. рис. 1). Очевидно, что каждому вектору плоскости с началом в точке $O(0,0)$ и концом в точке $M(a,b)$ соответствует комплексное число $a + bi$ и наоборот. Нулевому вектору соответствует комплексное число $0 + 0i.$

Взаимно однозначные соответствия, установленные между множеством комплексных чисел и множеством точек плоскости, между множеством комплексных чисел и множеством векторов плоскости позволяют называть комплексное число $z = a + bi$ точкой $a + bi$ или вектором $z = a + ib$.

2. Модуль комплексного числа. Перейдем к понятию модуля комплексного числа.

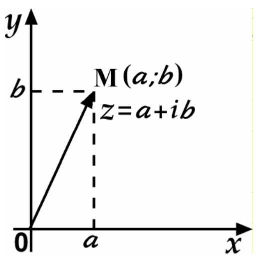

Рис. 1

Определение. *Модулем* комплексного числа $z = a + ib$ называется длина вектора, соответствующего этому числу. Модуль обозначается $|z|$ или буквой *r*. Применяя теорему Пифагора, получим, что $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (см. рис. 1).

Если $z = a + 0i,$ то $|z| = |a + 0i| = \sqrt{a^2} = |a|,$ то есть для действительного числа модуль совпадает с абсолютной величиной этого числа.

Очевидно, что $|z| > 0$ для всех $z \neq 0;$ $|z| = 0$ в том и только том случае, когда $z = 0 + i0 = 0.$

Пусть $z = a + ib$. Число $a - bi$ называется *комплексно сопряженным* с числом $z = a + ib$ и обозначается $\bar{z}$; $\bar{z} = a - bi$ (см. рис.2).

Заметим, что

$$|z| = |\bar{z}| = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2 = |\bar{z}|^2,$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2}=\frac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2},\ z_2\neq 0.$$

Полученное соотношение сводит деление комплексных чисел z_1 и z_2 к умножению чисел z_1 и $\bar{z}_2$ и к делению их произведения на действительное положительное число $|z_2|^2$, что позволяет не запоминать довольно громоздкую формулу (4).

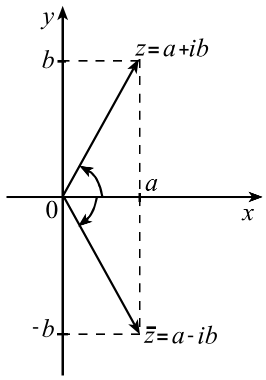

Рис. 2

Пример 1. Найти частное $\dfrac{3-5i}{-1+10i}$.

Умножая числитель и знаменатель дроби на число, сопряженное знаменателю, имеем

$$\frac{3-5i}{-1+10i}=\frac{(3-5i)(-1-10i)}{(-1+10i)(-1-10i)}=\frac{-3+5i-30i+50i^2}{1+100}=-\frac{53}{101}-\frac{25}{101}i.$$

3. Геометрический смысл сложения, вычитания и модуля разности двух комплексных чисел. Пусть $z_1=a_1+ib_1$ и $z_2=a_2+ib_2$. Им соответствуют векторы с координатами (a_1,b_1) и (a_2,b_2). Тогда числу

$$z_1+z_2=a_1+a_2+i(b_1+b_2)$$

будет соответствовать вектор с координатами (a_1+a_2,b_1+b_2). Таким образом, чтобы найти вектор, соответствующий сумме комплексных чисел z_1 и z_2, надо сложить векторы, отвечающие комплексным числам z_1 и z_2. Аналогично, разности z_1-z_2 комплексных чисел z_1 и z_2 соответствует разность векторов, соответствующих числам z_1 и z_2.

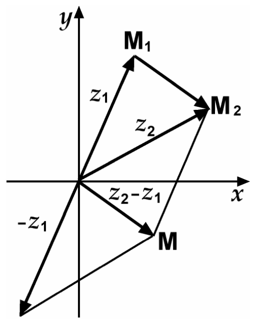

Рис. 3

Модуль $|z_1-z_2|$ двух комплексных чисел z_1 и z_2 по определению модуля есть длина вектора z_1-z_2. Построим этот вектор, как сумму двух векторов z_2 и $(-z_1)$ (см. рис. 3). Получим вектор $\overrightarrow{OM}$, равный вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$. Следовательно, $|z_1-z_2|$ есть длина вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$, то есть модуль разности двух комплексных чисел есть расстояние между точками комплексной плоскости, которые соответствуют этим числам.

С помощью полученного соотношения решим следующие задачи.

Пример 4. Найти множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию:

а) $|z-i|=1$, б) $1<|z+3+i|<3$,

в) $|z-1|<|z+1|$?

а) Условию $|z-i|=1$ удовлетворяют те и только те точки комплексной плоскости, которые удалены от точки i на расстояние, равное 1. Такие точки лежат на окружности радиуса 1 с центром в точке i (см. рис. 4).

б) Условию $1<|z+3+i|<3$ удовлетворяют те и только те точки комплексной плоскости, которые удалены от точки ($-3-i$) на расстояние, большее 1, но меньше 3. Такие точки расположены внутри кольца, образованного двумя концентрическими окружностями с центром в точке ($-3-i$) и радиусами $R_1=1, R_2=3$ (см. рис. 5: искомое множество заштриховано).

в) Используя геометрическую интерпретацию модуля разности двух комплексных чисел, задачу переформулируем так: найти множество точек комплексной плоскости, которые расположены ближе к точке $z=1$, чем к точке $z=-1$. Ясно, что это все точки плоскости, лежащие правее мнимой оси, и только они (см. рис. 6: искомое множество заштриховано).

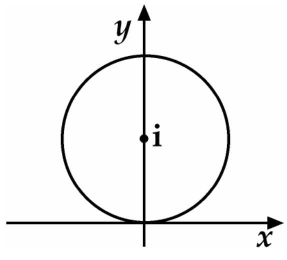

Рис. 4

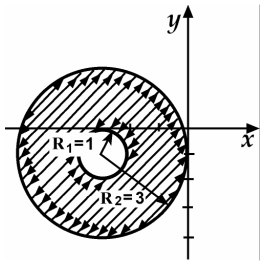

Рис. 5

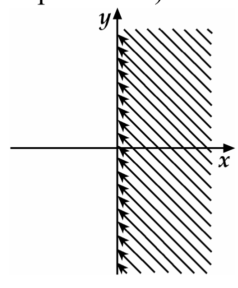

Рис. 6

4. Аргументы комплексного числа. Аргументом комплексного числа $z=a+ib\,(z\neq 0)$ называется величина угла между положительным направлением действительной оси и вектором z; величина угла считается положительной, если отсчет угла производится против часовой стрелки, и отрицательной, если отсчет производится по часовой стрелке.

Для обозначения того факта, что число φ является аргументом числа $z=a+ib$, пишут $\varphi=\arg z$ или $\varphi=\arg(a+ib)$.

Для числа $z=0$ аргумент не определяется. Поэтому во всех последующих рассуждениях, связанных с понятием аргумента будем считать, что $z\neq 0$.

Заметим, что заданием модуля и аргумента комплексное число определяется однозначно; число $z=0$ – единственное комплексное число, которое определяется заданием только своего модуля ($|z|=0$).

С другой стороны, если задано комплексное число, то, очевидно, модуль этого числа всегда определен единственным образом в отличие от аргумента, который всегда определяется неоднозначно: если φ – некоторый аргумент числа z, то углы $\varphi+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$ тоже являются аргументами того же числа z. Например, аргументами числа $(-1-i)$ являются углы $-\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{4},\frac{15\pi}{4}$ и т.д. (см. рис.7).

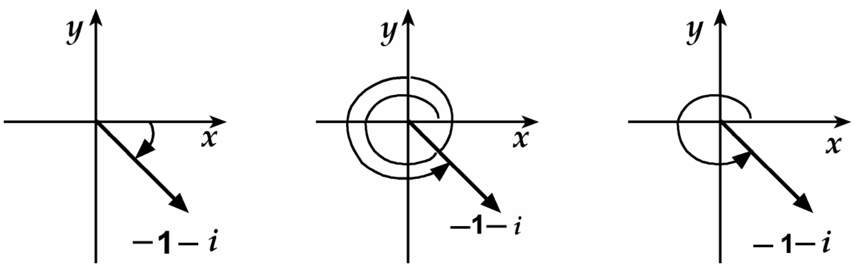

Рис. 7

Таким образом, для каждого числа z имеется бесконечное множество аргументов, любые два из которых отличаются друг от друга на число, кратное 2π.

Из определения тригонометрических функций (см. рис. 8) следует, что если $\varphi=\arg(a+ib)$, то имеет место следующая система

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{|z|}, \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{|z|} \end{cases} \qquad (5)$$

Справедливо и обратное: если выполняются равенства системы (5), то $\varphi = \arg(a+ib)$.

При решении задач на нахождение аргумента конкретного комплексного числа $z = a + ib$ полезно использовать геометрическую интерпретацию комплексного числа для определения той четверти, где находится точка $z = a + ib$, а после того, как это сделано, можно для нахождения аргумента воспользоваться одним (любым) из уравнений (5). Заметим, что аргументы чисел z и $\bar{z}$, $z \neq 0$, связаны соотношением:

$$\arg\bar{z} = -\arg z \text{ (см. рис.2).}$$

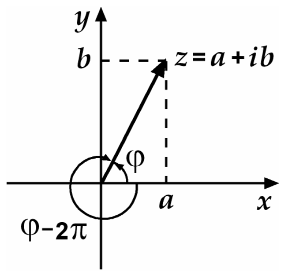

Рис. 8

Пример 5. Найти аргумент числа $z = 1 - i$.

Так как $\operatorname{Re} z = 1 > 0, \operatorname{Im} z = -1 < 0,$ то точка $z = 1 - i$ лежит в IV четверти. Поэтому достаточно такое решение одного из двух уравнений (5), которое является углом в IV четверти. Получаем

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+(-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \varphi = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathrm{Z}.$$

Заметим, что если $\varphi = \arg(a+ib),\ a \neq 0,$ то из (5) следует, что $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{b}{a}.$

Обратное утверждение неверно. В самом деле, число $\varphi = \dfrac{5\pi}{4}$ является решением уравнения $\operatorname{tg}\varphi = -1,$ но не является аргументом числа $(1-i).$

Пример 6. Найти аргумент числа $z = (-1 - i)$.

Так как $\operatorname{Re} z = -1 < 0, \operatorname{Im} z = -1 < 0,$ то точка $z = -1 - i$ лежит в III четверти. Следовательно, надо найти такое решение уравнения $\operatorname{tg}\dfrac{-1}{-1} = 1,$ которое является углом в III четверти. Получаем

$$\varphi = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Заметим, что если $a = 0,$ то есть $z = bi,$ то либо $\arg z = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$ (если $b > 0$), либо $\arg z = \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$ (если $b < 0$).