

### §8. Неравенства вида $a(x)^{f(x)} > a(x)^{g(x)}$

Рассмотрим неравенство  $a(x)^{f(x)} > a(x)^{g(x)}$ , где  $a(x), f(x), g(x)$  – непрерывные функции. ОДЗ:  $a(x) > 0$ .

Вспользуемся определением сложной экспоненты, взяв в качестве  $c$  число  $e$  (можно взять любое другое допустимое число). Неравенство принимает вид  $e^{f(x)\ln a(x)} > e^{g(x)\ln a(x)}$ . Используя (УР П1), получим равносильное неравенство в ОДЗ

$$(e-1)(f(x)\ln a(x) - g(x)\ln a(x)) = (e-1)(f(x) - g(x))\ln a(x) > 0,$$

а, используя (УР Л5), найдем окончательное равносильное неравенство  $(a(x)-1)(f(x)-g(x)) > 0$ .

Итак, мы вывели еще одно условие равносильности

$$\boxed{a(x)^{f(x)} > a(x)^{g(x)} \Leftrightarrow (a(x)-1)(f(x)-g(x)) > 0} \text{ в ОДЗ. (УР П5)}$$

или полное условие равносильности для строгого неравенства

$$\boxed{a(x)^{f(x)} > a(x)^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a(x) > 0, \\ (a(x)-1)(f(x)-g(x)) > 0. \end{cases}} \text{ (УР П5*)}$$

Поэтому

$$\boxed{\text{знак разности } a(x)^{f(x)} - a(x)^{g(x)} \text{ совпадает со знаком произведения } (a(x)-1)(f(x)-g(x)) \text{ в ОДЗ.}} \text{ (УР П6)}$$

**Преимущество** (УР П6) состоит в том, что, если  $a(x), f(x), g(x)$  – рациональные функции, то за **ОДИН ШАГ** мы перешли к классическому варианту метода интервалов.

**Пример 18.** Решите неравенство

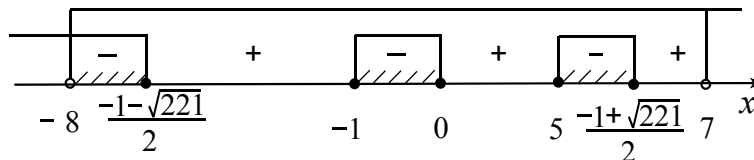
$$(56 - x - x^2)^{x^3 - 2x^2} \geq (56 - x - x^2)^{2x^2 + 5x}.$$

♦ ОДЗ:  $56 - x - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 56 < 0 \Leftrightarrow x \in (-8; 7)$ .

В ОДЗ, в силу (УР П5\*\*),  $(56 - x - x^2)^{x^3 - 2x^2} \geq (56 - x - x^2)^{2x^2 + 5x} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (56 - x - x^2)(x^3 - 2x^2 - 2x^2 - 5x) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{-1 - \sqrt{221}}{2}\right) \left(x - \frac{-1 + \sqrt{221}}{2}\right) x(x+1)(x-4) \leq 0 \Rightarrow$$



**Ответ:**  $\left[-8; \frac{-1 - \sqrt{221}}{2}\right] \cup [-1; 0] \cup \left[5; \frac{-1 + \sqrt{221}}{2}\right]$ . ♦