

### §4. Логарифмические уравнения

Логарифмические уравнения считаются сложными. Во-первых, потому, что у логарифма есть область определения. Во-вторых, подлогарифмические выражения могут быть любыми функциями, и надо помнить, что последующие преобразования могут быть неравносильными (например, возведение в квадрат), и потеря или приобретение корней в промежуточных выкладках уже не связано с ОДЗ логарифмов. Поэтому при решении простых логарифмических уравнений лучше пользоваться равносильными преобразованиями. В противном случае надо записать ОДЗ уравнения, но не надо находить его (решить все неравенства, связанные с ОДЗ, бывает намного труднее, чем решить само уравнение, а иногда и просто невозможно). После нахождения корней необходимо в этом случае сделать проверку. Если корень не принадлежит ОДЗ, то он не может быть решением. Если же корень принадлежит ОДЗ, то надо подставить его в уравнение.

Основными типами логарифмических уравнений являются следующие уравнения. Для любых  $a > 0, a \neq 1$

$$1. \log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases} \quad (\text{УР Л1})$$

Из двух систем удобно выбирать ту, которая проще.

$$2. g(\log_a f(x)) = 0.$$

**Пример 6.** (МГУ, 1997, биофак)  $\log_3 x + \log_3(x+1) = 1$ .

$$\diamond \log_3 x + \log_3(x+1) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ \log_3 x(x+1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x^2 + x = 3. \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{\sqrt{13} - 1}{2}. \diamond$$

**Пример 7.** (МГУ, 1998, ф – т почв.)

$$\diamond \log_{0,5} \left( \log_4 \frac{1}{x} \right) + \log_4 (\log_2 (16x^2)) = 0.$$

$$\log_{0,5} \left( \log_4 \frac{1}{x} \right) + \log_4 (\log_2 (16x^2)) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\log_2 \left( -\frac{\log_2 x}{2} \right) + \frac{\log_2 (4 + 2 \log_2 x)}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x < 0, \\ \log_2 (4 + 2 \log_2 x) = \log_2 \left( -\frac{\log_2 x}{2} \right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x < 0, \\ 4 + 2 \log_2 x = \frac{1}{4} \log_2^2 x \Leftrightarrow \log_2 x = 4 \pm 4\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x = 4 - 4\sqrt{2} \Leftrightarrow x = 2^{4-4\sqrt{2}}.$$

$$\text{Ответ: } 2^{4-4\sqrt{2}}. \diamond$$

**Пример 8.** (МГУ, 1999, псих. ф – т)  $x^{\log_7 4} + 5 \cdot 2^{\log_7 x} - 4 = 0$ .

$$\diamond x^{\log_7 4} + 5 \cdot 2^{\log_7 x} - 4 = 0 \Leftrightarrow (2^{\log_2 x})^{\log_7 4} + 5 \cdot 2^{\log_7 x} - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{2 \log_7 x} + 5 \cdot 2^{\log_7 x} - 4 = 0 \Leftrightarrow (2^{\log_7 x})^2 + 5 \cdot 2^{\log_7 x} - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{\log_7 x} = \frac{-5 + \sqrt{41}}{2} \Leftrightarrow \log_7 x = \log_2 \frac{\sqrt{41} - 5}{2} \Leftrightarrow x = 7^{\log_2 \frac{\sqrt{41} - 5}{2}}.$$

**Ответ:**  $7^{\log_2 \frac{\sqrt{41} - 5}{2}}$ . ♦

Особняком стоят уравнения и неравенства, которые нельзя отнести ни к показательным, ни к логарифмическим. Они содержат функции вида  $\log_{a(x)} f(x)$  и  $(a(x))^{f(x)}$ .