ТРИГОНОМЕТРИЯ

Элементарные тригонометрические уравнения

1. $\sin x = a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} |a| > 1, \\ \varnothing; \end{cases} \\ \begin{cases} |a| \le 1, \\ x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in Z. \end{cases} \end{array} \right.$

2. $\cos x = a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} |a| > 1, \\ \varnothing; \end{cases} \\ \begin{cases} |a| \le 1, \\ x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in Z. \end{cases} \end{array} \right.$

3. $tgx = a \Leftrightarrow x = arctga + \pi n, n \in Z.$
4. $ctgx = a \Leftrightarrow x = arcctga + \pi n, n \in Z.$

Пример. $\sin x = \frac{1-\sqrt{10}}{2} \Leftrightarrow \varnothing$, т.к. $\frac{1-\sqrt{10}}{2} = \frac{1-3,\ldots}{2} = -1,\ldots < -1.$

Основные примеры решения тригонометрических уравнений

1. Во многих случаях тригонометрическое уравнение удается преобразовать к виду $f(\sin mx) = 0$ (или $f(\cos mx) = 0$, или $f(tgx) = 0$). Затем надо решить уравнение $f(t) = 0,$ где $t = \sin mx,$ и для корней t_k, по модулю не больше 1, решить элементарные тригонометрические уравнения $\sin mx = t_k$.

Это заведомо можно сделать в следующих случаях.

а) $F(\sin^2 x, \cos^2 x, \cos x) = 0 \Leftrightarrow F(1-\cos^2 x, \cos^2 x, \cos x) = 0.$

б) Квадратное уравнение относительно $\cos x, \sin x.$

1) $a\cos^2 x + b\sin^2 x + c\sin 2x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a\cos^2 x + b\sin^2 x + 2c\sin x\cos x = 0 \Leftrightarrow b \cdot tg^2 x + 2c \cdot tgx + a = 0$ или

2) $a\cos^2 x + b\sin^2 x + c\sin x\cos x = d \equiv d(\cos^2 x + \sin^2 x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (b-d)tg^2 x + c \cdot tgx + (a-d) = 0.$

Пример 18. (МГУ, 1995, ф-т почв.) Найти все значения параметра a, при которых уравнение $\cos 2y + 4a\cos y + 2a^2 + 1 = 0$ не имеет рений.

♦ $\cos 2y + 4a\cos y + 2a^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow 2\cos^2 y - 1 + 4a\cos y + 2a^2 + 1 \Leftrightarrow$
$2(\cos y + a)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos y = -a \Leftrightarrow \begin{cases} |a| > 1, \\ y \in \varnothing. \end{cases}$

Пример 19. (МГУ, 1991, химфак).

$16\cos^4 \frac{x}{4} + 6\sin^2 \frac{x}{4} = 3\cos\frac{x}{2} + 12\cos^2 \frac{x}{4}\cos 3x.$

$$\blacklozenge\ 16\cos^4\frac{x}{4}+6\sin^2\frac{x}{4}=3\cos\frac{x}{2}+12\cos^2\frac{x}{4}\cos 3x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)^2+3\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)=3\cos\frac{x}{2}+6\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)\cos 3x \Leftrightarrow$$

$$4\cos^2\frac{x}{2}+2\cos\frac{x}{2}(1-3\cos 3x)+7-6\cos 3x=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{x}{2}=\frac{-1+3\cos 3x\pm 3\sqrt{(\cos 3x+3)(\cos 3x-1)}}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\cos 3x-1\geq 0 \Leftrightarrow \cos 3x=1,\\ \cos\frac{x}{2}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\pm\frac{2\pi}{3}+4\pi n \Rightarrow \cos 3\left(\pm\frac{2}{3}+4n\right)\pi\equiv 1,\ n\in Z.\end{cases}$$

в) Уравнение, однородное относительно $\cos kx, \sin mx$, т. е. $F(\sin x, \cos x)=0$, где $F(t\sin kx, t\cos mx)=t^n F(\sin kx, \cos mx)$. Это уравнение приводится к уравнению с одним неизвестным заменой переменных $t=\frac{\cos kx}{\sin mx}$ (или $t=\frac{\sin mx}{\cos kx}$), где предварительно проверяется, не является ли решением $\sin mx=0$ (или $\cos kx=0$).

3. Уравнение вида $\sin ax+\cos bx=0$ **(аналогично** $tgax+ctgbx=0$**)**

$$\sin ax+\cos bx=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin ax+\sin\left(\frac{\pi}{2}-bx\right)=0 \Leftrightarrow 2\sin\left(\frac{a-b+\frac{\pi}{2}}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b-\frac{\pi}{2}}{2}\right)=0.$$

Пример 20. $\sin 7x-\cos 19x=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sin 7x-\sin\left(\frac{\pi}{2}-19x\right)=0 \Leftrightarrow 2\sin\left(13x-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-6x\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\left(13x-\frac{\pi}{4}\right)=0 \Leftrightarrow x=\frac{\frac{\pi}{4}+k\pi}{13},\\ \cos\left(6x-\frac{\pi}{4}\right)=0 \Leftrightarrow \frac{\frac{\pi}{2}+k\pi+\frac{\pi}{4}}{6}.\end{array}\right.$$

3. Уравнения вида $a\sin\alpha x+b\cos\alpha x=0,\ ab\neq 0.$

$$a\sin\alpha x+b\cos\alpha x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\alpha x=0 \Rightarrow \sin\alpha x=0 \Rightarrow \varnothing;\\ \begin{cases}\cos\alpha x\neq 0,\\ tg\alpha x=-\frac{b}{a} \Leftrightarrow x=\frac{-arctg\frac{b}{a}+k\pi}{\alpha}.\end{cases}\end{array}\right.$$

Пример 21. $4\sin 3x-7\cos 3x=0.$

$$4\sin 3x-7\cos 3x=0 \Leftrightarrow tg 3x=\frac{7}{4} \Leftrightarrow x=\frac{arctg\frac{7}{4}+k\pi}{3}.$$

4. Уравнения вида $\sin x + \cos x = a$.

$\sin x + \cos x = a \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = a \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = a \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\frac{a}{\sqrt{2}}\right| \le 1, \\ x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos\frac{a}{\sqrt{2}} + 2k\pi, k \in Z. \end{cases}$$

5. Разложение на множители. Это самый распространенный метод решения тригонометрических уравнений

а) Применение формул тригонометрии.

Пример 22. (МГУ, 2001, биофак). $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - \sin x = \frac{1}{2}$

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2x \cdot \frac{1}{2} + \sin 2x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin x \cos x - \sin x = \sin^2 x \Leftrightarrow \sin x\left(\sqrt{3}\cos x - \sin x - 1\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi n, \\ \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + \pi k. \end{array}\right.$$

<u>Ответ:</u> $\pi n, \pm\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k.n \in R$.

Применяя формулы тригонометрии, всегда надо помнить, что **не все формулы** тригонометрии **являются тождествами.**
Чтобы не пользоваться неравносильными переходами для тангенсов, лучше перейти сразу к синусам и косинусам.

Пример 23. $ctg\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 5tg2x + 7.$

$$ctg\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 5tg2x + 7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} = \frac{5\sin 2x}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)} + 7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \ne \sin x, \\ 1 + \sin 2x = 5\sin 2x + 7\cos 2x \Leftrightarrow 4\sin 2x + 7\cos 2x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + arcctg5 + \pi n, \\ x = \frac{\pi}{4} - arcctg\frac{1}{3} + \pi n. \end{array}\right.$$

б) Группировка слагаемых, применение формул (особенно часто используются формулы $\cos 2x$ в той или иной форме):

Пример 24. (МФТИ,2001). Решите уравнение

$$\frac{\cos^3 x \sin 3x}{\cos 2x} + \frac{\sin^3 x \cos 3x}{\cos 2x} = 3\sin 2x \cos x.$$

$$\blacklozenge \ \frac{\cos^3 x \sin 3x}{\cos 2x} + \frac{\sin^3 x \cos 3x}{\cos 2x} = 3\sin 2x \cos x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos^2 x\cos x\sin 3x + \sin^2 x\sin x\cos 3x}{\cos 2x} \equiv$$

$$\equiv \frac{(1+\cos 2x)(\sin 4x + \sin 2x) + (1-\cos 2x)(\sin 4x - \sin 2x)}{4\cos 2x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{6\sin 2x\cos 2x}{4\cos 2x} = 3\sin 2x\cos x \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x \neq 0, \\ \sin 2x(1-\cos x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{k\pi}{2}, \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k. \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \left[\begin{array}{l} \dfrac{k\pi}{2}, \\ \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z. \end{array}\right.$$

Пример 25. (МФТИ, 2002). Решите уравнение

$$\frac{3+\cos 4x - 8\cos^4 x}{4(\cos x + \sin x)} = \frac{1}{\sin x} \Leftrightarrow \frac{3+\cos 4x - 2(1+\cos 2x)^2}{4(\cos x + \sin x)} \equiv$$

$$\equiv \frac{-4\cos 2x}{4(\cos x + \sin x)} \equiv \frac{(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)}{\cos x + \sin x} = \frac{1}{\sin x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x + \sin x \neq 0, \\ \sin x \neq 0, \\ \sin^2 x - \sin x\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x(\cos x + \sin x) = 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z.$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$.♦

в) Преобразование произведения в сумму, а затем в новое произведение.

Пример 26. Решите уравнение

♦ $\cos 14x\cos 15x = \cos 16x\cos 17x$.

$$\cos 14x\cos 15x = \cos 16\cos 17 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\cos 29x + \cos x) = \frac{1}{2}(\cos 33x + \cos x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2\sin 31x\sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = \left[\begin{array}{l} \dfrac{\pi n}{31}, \\ \dfrac{\pi n}{2}, n \in Z. \end{array}\right. \Rightarrow$$

Ответ: $\dfrac{\pi n}{31}, \dfrac{\pi n}{2}, n \in Z$. ♦

Пример 27. (МФТИ,1984) Решите уравнение

$$\sqrt{6\sin x\cos 2x} = \sqrt{-7\sin 2x}.$$

♦ $\sqrt{6\sin x\cos 2x} = \sqrt{-7\sin 2x} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x \leq 0, \\ 6\sin x\cos 2x = -7\sin 2x. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x \leq 0, \\ \sin x(6\cos^2 x + 7\cos x - 3) = 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0; \\ \begin{cases} \sin 2x \le 0, \\ \cos x = \left[\begin{array}{l} -\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \varnothing, \\ \dfrac{1}{3}. \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi n, \\ \begin{cases} \cos x = \dfrac{1}{3}, \\ 2\sin x \cos x \le 0 \Rightarrow \sin x \le 0. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x = -\arccos\dfrac{1}{3} + 2\pi n.$ Ответ: $-\arccos\dfrac{1}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$

6. $F(\sin 2x, (\sin x \pm \cos x)) = 0$.

$(\sin x - \cos x)^2 = 1 - \sin 2x \Leftrightarrow \sin 2x = 1 - (\sin x - \cos x)^2.$

$t = \sin x - \cos x \Rightarrow F(\sin 2x, \sin x - \cos x) \equiv F(1 - t^2, t) = 0$

$(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x \Leftrightarrow \sin 2x = (\sin x + \cos x)^2 - 1$

$t = \sin x + \cos x \Rightarrow F(\sin 2x, \sin x + \cos x) \equiv F(t^2 - 1, t) = 0$

Пример 28.(МГУ, 1994, физфак) $\sqrt{\sin 2x} = \sqrt{\cos x - \sin x - 1}.$

♦ $\sqrt{\sin 2x} = \sqrt{\cos x - \sin x - 1} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = \cos x - \sin x - 1, \\ \cos x - \sin x - 1 \ge 0.. \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - (\cos x - \sin x)^2 = \cos x - \sin x - 1 \Leftrightarrow \cos x - \sin x = \left[\begin{array}{l} -2 \Rightarrow \varnothing, \\ 1; \end{array}\right. \\ \cos x - \sin x - 1 \ge 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \cos x - \sin x = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + (-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$

Ответ: $\dfrac{\pi}{4} + (-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$

7. $F(\sin^{2n} x, \cos^{2m} x, \cos 2x) = 0 \Leftrightarrow f(\cos 2x) = 0$

$$\textbf{8. } F(\sin x, \cos x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\dfrac{x}{2} = 0, \\ \begin{cases} \cos\dfrac{x}{2} \ne 0, \\ F\left(\dfrac{2tg\dfrac{x}{2}}{1 + tg^2\dfrac{x}{2}}, \dfrac{1 - tg^2\dfrac{x}{2}}{1 + tg^2\dfrac{x}{2}}\right) \equiv f\left(tg\dfrac{x}{2}\right) = 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

9. Универсальная подстановка, которая приводит уравнение $F(\sin x, \cos x) = 0$ к уравнению с одним переменным $t = tg\dfrac{x}{2}$.

$F(\sin x, \cos x) = 0 \Leftrightarrow F\left(2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}, \cos^2\dfrac{x}{2} - \sin^2\dfrac{x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow$

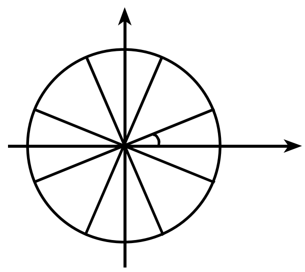
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos\dfrac{x}{2} = 0, \\ F\left(0, -\sin^2\dfrac{x}{2}\right) = 0; \end{cases} \\ \begin{cases} \cos\dfrac{x}{2} \neq 0, \\ F\left(\cos^2\dfrac{x}{2}\cdot 2tg\dfrac{x}{2}, \cos^2\dfrac{x}{2}\left(1 - tg^2\dfrac{x}{2}\right)\right) = 0 \Leftrightarrow F\left(\dfrac{2tg\dfrac{x}{2}}{1+tg^2\dfrac{x}{2}}, \dfrac{1-tg^2\dfrac{x}{2}}{1+tg^2\dfrac{x}{2}}\right) = 0 \Leftrightarrow f\left(tg\dfrac{x}{2}\right) = 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

10. Уравнение вида $a\sin x + b\cos x = c$, $ab \neq 0$. Введение вспомогательного угла

Рассмотрим выражение:

$$y(x) = a\sin x + b\cos x \equiv \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right)$$

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 \equiv 1.$$



Поэтому точки с координатами

$$\left(\pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right),$$

$$\left(\pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right),$$

$$\left(\pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \mp\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), \left(\pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \mp\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

принадлежат единичной окружности (всего восемь точек), и каждая пара координат может быть принята за косинус и синус соответствующего угла.

При этом всегда найдутся две пары положительных чисел, а, значит, угол в первой четверти, который может быть записан в виде любого "арка".

При необходимости или желании можно выбрать любую пару, преобразовав соответственно заданное выражение.

Примеры.

$$1. -3\cos x - 4\sin x \equiv 5\left(-\frac{3}{5}\cos x - \frac{4}{5}\sin x\right) \equiv -5\left(\frac{3}{5}\cos x + \frac{4}{5}\sin x\right) \equiv$$

$$\equiv -5\sin\left(x + \arcsin\frac{3}{5}\right) \equiv -5\cos\left(x - \arccos\frac{3}{5}\right) \equiv$$

$$\equiv 5\left(\sin\left(\pi + \arcsin\frac{3}{5}\right)\cos x + \cos\left(\pi + \arcsin\frac{3}{5}\right)\sin x\right) \equiv 5\sin\left(\pi + \arcsin\frac{3}{5} + x\right) \equiv$$

$$\equiv 5\left(\cos\left(\pi + \arccos\frac{3}{5}\right)\cos x + \sin\left(\pi + \arccos\frac{3}{5}\right)\sin x\right) \equiv$$

$$\equiv 5\cos\left(\pi + \arccos\frac{3}{5} - x\right).$$

$$2. -3\cos x + 4\sin x \equiv -5\left(\frac{3}{5}\cos x - \frac{4}{5}\sin x\right) = -5\sin\left(x - \arcsin\frac{3}{5}\right) \equiv .$$

$$\equiv -5\cos\left(x + \arccos\frac{3}{5}\right).$$

$$3. -3\cos x + 4\sin x \equiv 5\left(\frac{4}{5}\sin x - \frac{3}{5}\cos x\right) = 5\sin\left(x - \arccos\frac{4}{5}\right) \equiv$$

$$\equiv 5\cos\left(x + \arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\right).$$

В общем случае положим, например,

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\alpha, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\alpha.$$

Тогда заданное выражение $y(x) = a\sin x + b\cos x$ примет вид

$y(x) = \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(x+\alpha)$, т. к.

$$y(x) = \sqrt{a^2+b^2}(\cos\alpha\sin x + \sin\alpha\cos x) \equiv \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(\alpha + x).$$

Уравнение $a\sin x + b\cos x = c$ примет **простейший вид**

$$\sin(\alpha + x) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Пример 29. (МИФИ**).** Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $a\sin 3x + \sqrt{3(1-a)}\cos 3x = 2a - 3$ имеет ровно три решения на отрезке $[-\pi;\pi]$.

ОДЗ: $a \le 1$.

$$a\sin 3x + \sqrt{3(1-a)}\cos 3x = 2a - 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2-3a+3}}\sin 3x + \frac{\sqrt{3(1-a)}}{\sqrt{a^2-3a+3}}\cos 3x = \frac{2a-3}{\sqrt{a^2-3a+3}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin(3x+\alpha) = \frac{2a-3}{\sqrt{a^2-3a+3}},$$

где $\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2-3a+3}}$, $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3(1-a)}}{\sqrt{a^2-3a+3}}$.

Функция $f(x) = \sin(3x+\alpha)$ имеет период $\dfrac{2\pi}{3}$, поэтому ровно три решения на отрезке $[-\pi;\pi]$ может быть только тогда, если

$$\frac{2a-3}{\sqrt{a^2-3a+3}} = \pm 1 \Leftrightarrow \pm\sqrt{a^2-3a+3} = 2a-3 \Leftrightarrow a^2 - 3a + 2 = 0 \Leftrightarrow a = \left[\begin{array}{l}1,\\ 2.\end{array}\right. \Rightarrow$$

$a = 1$, и это значение не принимается ни на одном из концов отрезка $[-\pi;\pi]$. Проверим это.

$a=1: a\sin 3x+\sqrt{3(1-a)}\cos 3x=2a-3 \Leftrightarrow$
$\sin 3x=-1 \Rightarrow \sin(-3\pi)=\sin 3\pi=0\neq \pm 1.$

Ответ: 1.♦

11. Отбор корней в тригонометрических уравнениях

Пример 30. (МФТИ,2001). $tgx+tg3x=4|\sin x|$

ОДЗ: $\cos x\cos 3x\neq 0.$

$$\frac{\sin 4x}{\cos x\cos 3x}\equiv\frac{4\sin x\cos x\cos 2x}{\cos x\cos 3x}=4|\sin x|\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x\cos 2x=|\sin x|\cos 3x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin x\geq 0,\\ \sin x(\cos 2x-\cos 3x)=0;\end{cases}\\ \begin{cases}\sin x<0,\\ \cos 2x+\cos 3x=0.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0\Leftrightarrow x=\pi k,\\ \begin{cases}\sin x\geq 0,\\ \cos 2x-\cos 3x=0;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pi k,\\ \begin{cases}\sin x\geq 0,\\ \sin\frac{5x}{2}\sin\frac{x}{2}=0\Leftrightarrow x=\left[\begin{array}{l}\frac{2\pi k}{5},\\ 2\pi k;\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}\sin x>0,\\ \cos\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2}=0\Leftrightarrow x=\left[\begin{array}{l}\frac{\pi(2n+1)}{5},\\ \pi(2k+1).\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{2\pi k}{5}:\cos\frac{2\pi k}{5}\neq 0, \cos\frac{6\pi k}{5}\neq 0, \sin\frac{2\pi k}{5}\geq 0, k=\left[\begin{array}{l}5n,\\ 5n+1,\\ 5n+2.\end{array}\right.$$

$$x=\frac{\pi(2n+1)}{5}:\cos\frac{\pi(2n+1)}{5}\neq 0, \cos\frac{6\pi(2n+1)}{5}\neq 0, \sin\frac{\pi(2n+1)}{5}=$$

$$=\sin\left(\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi n}{5}\right)<0, n=\left[\begin{array}{l}5k+3,\\ 5k+4.\end{array}\right.$$

$$x=\left[\begin{array}{l}\pi k,\\ \dfrac{2\pi}{5}+2\pi k,\\ \dfrac{4\pi}{5}+2\pi k,\\ \dfrac{7\pi}{5}+2\pi k,\\ \dfrac{9\pi}{5}+2\pi k.\end{array}\right. \Leftrightarrow x=\left[\begin{array}{l}\pi k,\\ \dfrac{2\pi}{5}+\pi k,\\ \dfrac{4\pi}{5}+\pi k.\end{array}\right.$$

<u>Ответ:</u> $\pi k, \dfrac{2\pi}{5}+\pi k, \dfrac{4\pi}{5}+\pi k, k\in Z$.

12. Нестандартные уравнения

Пример 31. Решите уравнение $\sin^8 x-\cos^5 x=1$.

♦ $\sin^8 x-\cos^5 x=1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sin^8 x-\cos^5 x=\sin^2 x+\cos^2 x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x\left(1-\sin^6 x\right)+\cos^2 x\left(1+\cos^3 x\right)=0.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin^2 x=0,\\ \cos^2 x=0;\end{cases} \Leftrightarrow \varnothing;\\ \begin{cases}\sin^2 x=0,\\ 1+\cos^3 x=0;\end{cases} \Leftrightarrow x=\pi(2n+1), n\in Z;\\ \begin{cases}\sin^6 x=1,\\ \cos^2 x=0;\end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z;\\ \begin{cases}\sin^6 x=1,\\ \cos^3 x=-1;\end{cases} \Leftrightarrow \varnothing.\end{array}\right.$$

<u>Ответ:</u> $\pi(2n+1), \dfrac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$. ♦