§ 5. Обратные тригонометрические функции

Пример 16. (МИФИ). Найти наибольшее значение $f(x) = arctg(\sin 11x) + arcctg(\sqrt{3}\cos 2x)$ и x, при которых оно достигается.

♦ $-1 \le \sin 11x \le 1 \Rightarrow -\frac{\pi}{4} = arctg(-1) \le arctg(\sin 11x) \le arctg(1) = \frac{\pi}{4}$,

$-\sqrt{3} \le \sqrt{3}\cos 2x \le \sqrt{3} \Rightarrow \frac{\pi}{6} = arcctg\sqrt{3} \le arcctg(\sqrt{3}\cos 2x) \le arcctg(-\sqrt{3}) = \frac{5\pi}{6}$.

Поэтому $-\frac{\pi}{12} \le arctg(\sin 11x) + arcctg(\sqrt{3}\cos 2x) \le \frac{13\pi}{12}$, при этом $f_{\max}(x) = \frac{13\pi}{12}$, если

$$\begin{cases} \sin 11x = 1, \\ \cos 2x = -1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z, \\ \sin 11\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = (-1)^{11k}\sin\frac{3\pi}{2} = -(-1)^{11k} = 1 \Leftrightarrow k = 2n-1,\ n \in Z. \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x = 2\pi n - \frac{\pi}{2}, n \in Z \Rightarrow$ Ответ: $f_{\max}(x) = f\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = \frac{13\pi}{12}$. ♦

Зачем нужно уметь строить элементарные графики?

Пример 17. (МФТИ, 2002) Найти все значения параметра a, при которых уравнение $(a + 3 - |x+2|)(a + x^2 + 4x) = 0$ имеет

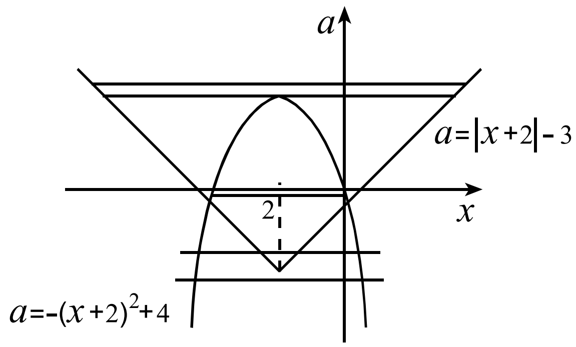
1) ровно три корня, 2) ровно два корня.

♦ $(a + 3 - |x+2|)(a + x^2 + 4x) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{aligned} & a + 3 - |x+2| = 0 \Leftrightarrow a = |x+2| - 3, \\ & a + x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow a = -(x+2)^2 + 4. \end{aligned}\right.$$

Совокупность проще всего решать в плоскости (x, a). Из картинки видно, что

1) уравнение имеет ровно три корня, если $a = \left[\begin{aligned} & -3, \\ & 4. \end{aligned}\right.$;



2) уравнение имеет ровно два корня, если прямая $a = const$ проходит или выше параболы, или ниже вершины угла, или через точки пересечения параболы и угла. Найдём a, при котором имеем пересечение:

$|x+2|-3=4-(x+2)^2 \Leftrightarrow |x+2|=\dfrac{\sqrt{29}-1}{2} \Rightarrow a=\dfrac{\sqrt{29}-7}{2}.$ Поэтому имеем ровно два корня, если $\left[\begin{array}{l} a>4, \\ a<-3, \\ a=\dfrac{\sqrt{29}-7}{2}. \end{array}\right.$

<u>Ответ:</u> 1) $\{-3;4\}$, 2) $(-\infty;-3)\cup\left\{\dfrac{\sqrt{29}-7}{2}\right\}\cup(4;+\infty)$. ♦