§ 3. Монотонные функции. Четные и нечетные функции

Числовая функция $f(x)$, определённая на множестве X, называется возрастающей (убывающей) на этом множестве, если для любых $x_1, x_2 \in X$, таких, что $x_2 > x_1$ следует, что

$$f(x_2) > f(x_1) (f(x_2) < f(x_1)).$$

Функция возрастающая или убывающая на множестве, называется монотонной функцией. Для нас важно, что отсюда следует, что из $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, а следовательно, любая **монотонная функция имеет обратную**. Монотонность элементарных функций можно доказывать непосредственно или с помощью производных (это будет позже). Можно рассматривать ещё так называемые не строго монотонные функции – это функции, для которых для любых $x_1, x_2 \in X, x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1) (f(x_2) \leq f(x_1))$. К ним относится функция $y = const$, которая не имеет обратной.

Пример 11. Рассмотрим функцию $y = \dfrac{1}{x}$. Формула имеет смысл для $x \in (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$, что и будет $D(y)$. Исследуем разность $f(x_2) - f(x_1) = \dfrac{1}{x_2} - \dfrac{1}{x_1} = \dfrac{-(x_2 - x_1)}{x_1 x_2}$. Отсюда следует, что, если $x_2 > x_1$ и $x_1 x_2 > 0$, т. е. они одного знака, то разность отрицательна. Следовательно, функция убывает на $(-\infty;0)$ и убывает на $(0;+\infty)$, но не убывает на $D(y)$ (а потому не является монотонной на области определения), т. к. $x_1 < 0, x_2 > 0 \Rightarrow x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0$ (что подтверждает правильность рис. 2б).

Функция $f(x)$ называется четной (нечетной) на X, если выполнены два условия:

1. Если $x \in X$, то $-x \in X$, т. е. область определения симметрична относительно 0.
2. Для любого $x \in X \Rightarrow f(x) = f(-x)$ $(f(x) = -f(-x))$.

Если функция не является чётной или нечётной, то говорят, что она является функцией общего вида.

Пример 12. Определить, являются ли чётными, нечётными или функциями общего вида следующие функции:

а) $y = \sqrt{x}$, б) $y = \cos 4x$, в) $y = \dfrac{x^3 - 4\sin 2x}{ctgx}$,

г) $y = |x+1| - |x-1|$, д) $y = \dfrac{x-1}{x^2+4}$.

♦а) $y = \sqrt{x}$ является функцией общего вида, т. к. её область определения $D(y) = [0;+\infty)$ не симметрична относительно 0.

б) $y = \cos 4x$ – чётная функция.

в) $y = \dfrac{x^3 - 4\sin 2x}{ctgx}$ – чётная функция, т. к.

1) область определения $D(y)$ этой функции, состоящая из объединения счётного множества интервалов вида $\left(\pi n; \dfrac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in Z$, симметрична относительно 0;

2) для любого $x \in D(y) \Rightarrow y(x) = y(-x)$.

г) $y = |x+1| - |x-1|$ – нечётная, т. к.

$y(-x) = |-x+1| - |-x-1| = -(|x+1| - |x-1|) = -y(x)$.

д) $y = \dfrac{x-1}{x^2+4}$ – функция общего вида, т. к., например,

$$\begin{cases} 0 = y(1) \neq y(-1) = -\dfrac{2}{5}, \\ y(1) \neq -y(-1). \end{cases} ♦$$

График любой чётной функции симметричен относительно оси ординат, а график любой нечётной функции симметричен относительно начала координат. Поэтому для построения графиков таких функций достаточно построить их для положительных значений, а затем продолжить чётным или нечётным образом соответственно.

Посмотрим, как используется чётность функций при решении задач.

Пример 13. (МГУ, 1990, мехмат). Найти все значения параметра a, при которых уравнение $x^2 - 2a\sin(\cos x) + a^2 = 0$ имеет единственное решение.

♦Заметим, что левая часть уравнения является чётной функцией на R. Поэтому, если уравнение имеет решение $x = x_0$, то $x = -x_0$ тоже является решением. Если $x_0 \neq -x_0 \Leftrightarrow x_0 \neq 0$, то уравнение имеет, по крайней мере, два корня. Поэтому, если корень один, то это $x = 0$. Посмотрим, при каких a уравнение имеет такой корень.

$$x = 0: -2a\sin 1 + a^2 = 0 \Leftrightarrow a = \left[\begin{array}{l} 0, \\ 2\sin 1. \end{array}\right.$$

Но при таких a уравнение может иметь, вообще говоря, и другие корни – такие a нам не подходят. Найдём все решения при полученных a.

$a = 0: x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0;$

$a = 2\sin 1: x^2 - 4\sin 1 \sin\cos x + 4\sin^2 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 = 4\sin 1(\sin\cos x - \sin 1) \leq 0 (\sin\cos x \leq \sin 1) \Leftrightarrow x = 0.$

Итак, при этих a имеем единственное решение $x = 0$.

Ответ: $0; 2\sin 1$. ♦