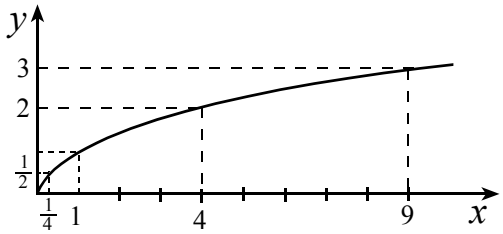
§6. Построение графиков функций

В школьном курсе 7-го класса вы уже рассматривали графики линейной функции $y = kx + b$, графики функций $y = x^2$ и $y = x^3$. В этом году вы познакомились с еще одной функцией, а именно, с функцией $y = \sqrt{x}$.

Составим таблицу значений этой функции, очевидно, что она определена при $x \geq 0$.

x	0	$1/16$	$1/9$	$1/4$	1	4	9
y	0	$1/4$	$1/3$	$1/2$	1	2	3

Построим график этой функции.



Пример 1. Постройте графики функций:

а) $y = \sqrt{x^2}$; б) $y = -\sqrt{-x}$; в) $y = \sqrt{x+1}$; г) $y = \sqrt{|x+1|}$;

д) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 4} - \sqrt{x^2 + 2x + 1}$; е) $y = \left(-\sqrt{x}\right)^2$.

Δ а) Из определения арифметического корня следует, что

$$\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x, \text{ если } x \geq 0, \\ -x, \text{ если } x < 0. \end{cases}$$

График данной функции приведен на рис. 2.

б) Из определения корня следует, что $-x \geq 0$, т. е. $x \leq 0$. Составим таблицу значений функции.

x	0	$-1/16$	$-1/4$	-1	-4	-9
y	0	$-1/4$	$-1/2$	-1	-2	-3

График функции изображен на рис. 3.

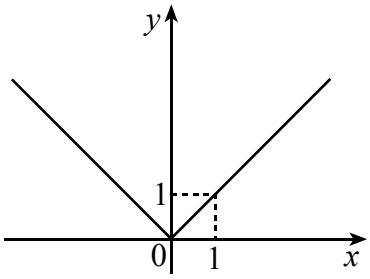


Рис. 2

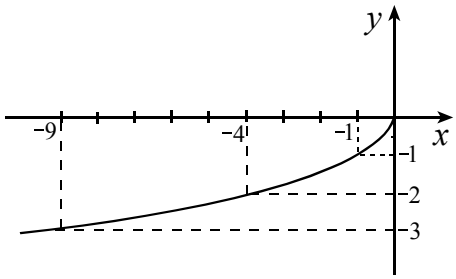


Рис. 3

в) Данная функция определена при $x + 1 \geq 0, x \geq -1$. При $x = -1$, $y = 0$, при $x = 3$, $y = 2$, при $x = 8$, $y = 3$. График данной функции получается из графика функции $y = \sqrt{x}$ параллельным сдвигом вдоль оси Ox на одну единицу влево. Приводим график данной функции на рис. 4.

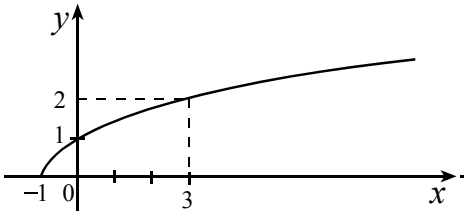


Рис. 4

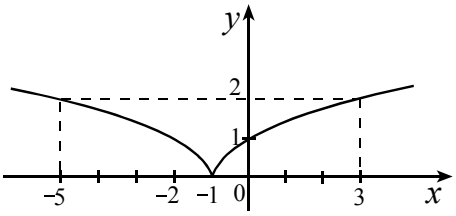


Рис. 5

© 2004, ЗФТШ при МФТИ. Составитель Яковлева Тамара Харитоновна.

г) Данная функция определена при всех x. При $x \geq -1$ выражение $|x+1| = x+1$, поэтому график данной функции совпадает с графиком функции $y = \sqrt{x+1}$, который мы привели на рис. 4. При $x \leq -1$ данная функция определена, при этом $y = \sqrt{-x-1}$. Заметим, что данная функция в точках, симметричных относительно точки (-1), принимает равные значения. Например, при $x = 0$ и $x = -2$ значения функции совпадают и равны 1. В точках 3 и (-5) значения функции также совпадают и равны 2. Про график данной функции говорят так: график функции симметричен относительно прямой $x = -1$. График данной функции приведен на рис. 5.

д) Преобразуем выражение, которым задается наша функция.

$$y = \sqrt{(x-2)^2} - \sqrt{(x+1)^2} = |x-2| - |x+1|.$$

При $x \geq 2$ $y = x - 2 - x - 1 = -3$.

При $-1 < x < 2$ $y = -x + 2 - x - 1 = -2x + 1$.

При $x \leq -1$ $y = -x + 2 + x + 1 = 3$.

График функции изображен на рис. 6.

е) Данная функция определена при $x \geq 0$. Для этих значений $y = \left(-\sqrt{x}\right)^2 = x$. График функции приведена на рис. 7.▲

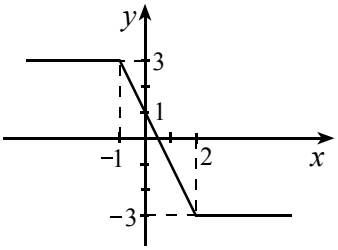


Рис. 6

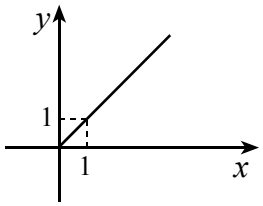


Рис. 7

Пример 2. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} 3 - \sqrt{-x}, \text{ если } x \leq 0; \\ 3 - \dfrac{5}{2}x, \text{ если } 0 < x < 2; \\ \sqrt{x-2} - 2, \text{ если } x \geq 2. \end{cases}$$

Δ На рис. 3 в предыдущем примере мы строили график функции $y = -\sqrt{-x}$. Значения данной функции при $x \leq 0$ получаются из значений функции $y = -\sqrt{x}$ прибавлением числа 3, т. е. график функции $y = 3 - \sqrt{-x}$ получается из графика функции $y = -\sqrt{-x}$ сдвигом параллельно оси Oy на 3 единицы вверх.

Рассмотрим функцию $y = 3 - \dfrac{5}{2}x$. Ее графиком является прямая, проходящая через точки $(0;3)$ и $(2;-2)$. График данной функции при $0 < x < 2$ совпадает с графиком прямой $y = 3 - \dfrac{5}{2}x$. При $x \geq 2$ можно сначала построить график функции $y = \sqrt{x-2}$, а затем сдвинуть на 2 единицы вниз параллельно оси Oy. Составим таблицу значений функции

x	-9	-1	0	2	6
y	0	1	3	-2	0

График функции приведен на рис. 8.▲

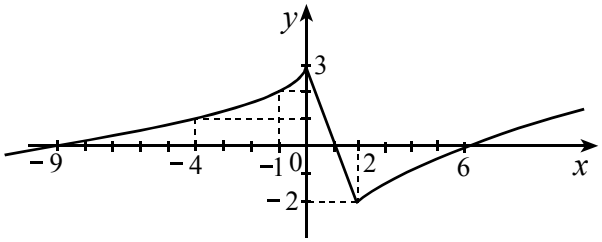


Рис. 8

© 2004, ЗФТШ при МФТИ. Составитель Яковлева Тамара Харитоновна.