§3. Свойства арифметического квадратного корня

В школьном учебнике у вас доказываются две теоремы.

Теорема 1. Если $a \geq 0$ и $b \geq 0$, то $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

Теорема 2. Если $a \geq 0$ и $b > 0$, то $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Пример 1. Найдите значение выражения (без микрокалькулятора):

а) $\sqrt{5 \cdot 35 \cdot 175}$; б) $\sqrt{5\dfrac{11}{49}}$; в) $\dfrac{\sqrt{75}}{\sqrt{192}}$;

г) $\sqrt{\dfrac{149^2 - 76^2}{457^2 - 384^2}}$; д) $\sqrt{16^3 \cdot 4^4}$.

$\triangle$ а) $\sqrt{5 \cdot 35 \cdot 175} = \sqrt{175 \cdot 175} = 175$.

б) $\sqrt{5\dfrac{11}{49}} = \sqrt{\dfrac{256}{49}} = \dfrac{16}{7}$.

в) $\dfrac{\sqrt{75}}{\sqrt{192}} = \sqrt{\dfrac{75}{192}} = \sqrt{\dfrac{25}{64}} = \dfrac{5}{8}$.

г) $\sqrt{\dfrac{149^2 - 76^2}{457^2 - 384^2}} = \sqrt{\dfrac{(149-76)(149+76)}{(457-384)(457+384)}} = \sqrt{\dfrac{73 \cdot 225}{73 \cdot 841}} =$

$= \sqrt{\dfrac{225}{841}} = \dfrac{\sqrt{225}}{\sqrt{841}} = \dfrac{15}{29}$.

д) $\sqrt{16^3 \cdot 4^4} = \sqrt{\left(4^2\right)^3 \cdot 4^4} = \sqrt{4^6 \cdot 4^4} = \sqrt{4^{10}} = \sqrt{\left(4^5\right)^2} = 4^5$.

Можно решать и другим способом.

$\sqrt{16^3 \cdot 4^4} = \sqrt{16^2 \cdot 16 \cdot 4^4} = \sqrt{16^2} \cdot \sqrt{16} \cdot \sqrt{\left(4^2\right)^2} = 16 \cdot 4 \cdot 4^2 =$

$= 4^2 \cdot 4 \cdot 4^2 = 4^5$. ▲

Рассмотрим $\sqrt{48}$. Преобразуем это выражение: $\sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} =$
$= \sqrt{16} \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$.

В этом случае мы говорим, что множитель 4 вынесли из под знака корня.

Теперь рассмотрим выражение $5\sqrt{7}$, преобразуем его:

$5\sqrt{7} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{25 \cdot 7} = \sqrt{175}$.

В этом случае говорим, что множитель 5 внесли под знак корня.

Пример 2. Вынесите множитель из под знака корня:

а) $\sqrt{\left(5\sqrt{13} - 4\sqrt{19}\right)^2}$; б) $\sqrt{\left(\sqrt{17} - \sqrt{11}\right)^3 \left(\sqrt{3} - \sqrt{5}\right)^5}$;

в) $-\sqrt{-a^4 b^{11}}$; г) $\sqrt{21(xy)^2}$, если $xy \leq 0$.

Δ Так как $\sqrt{a^2} = |a|$, то $\sqrt{\left(5\sqrt{13} - 4\sqrt{19}\right)^2} = \left|5\sqrt{13} - 4\sqrt{19}\right|$.

Определим знак числа $5\sqrt{13} - 4\sqrt{19}$. Числа $5\sqrt{13}$ и $4\sqrt{19}$ – положительные. Рассмотрим их квадраты: $\left(5\sqrt{13}\right)^2 = 25 \cdot 13 = 325$ и $\left(4\sqrt{19}\right)^2 = 16 \cdot 19 = 304$. Так как $304 < 325$, то $\sqrt{304} < \sqrt{325}$, т. е. $5\sqrt{13} > 4\sqrt{19}$, поэтому $\left|5\sqrt{13} - 4\sqrt{19}\right| = 5\sqrt{13} - 4\sqrt{19}$.

б) $\sqrt{\left(\sqrt{7} - \sqrt{11}\right)^3 \left(\sqrt{3} - \sqrt{5}\right)^5} =$

$= \sqrt{\left(\sqrt{7} - \sqrt{11}\right)^2 \left(\sqrt{7} - \sqrt{11}\right)\left(\sqrt{3} - \sqrt{5}\right)^4 \left(\sqrt{3} - \sqrt{5}\right)} =$

$= \left|\sqrt{7} - \sqrt{11}\right| \left(\sqrt{3} - \sqrt{5}\right)^2 \sqrt{\left(\sqrt{7} - \sqrt{11}\right)\left(\sqrt{3} - \sqrt{5}\right)}$.

Число $\sqrt{7} < \sqrt{11}$, т. к. $\left(\sqrt{7}\right)^2 = 7, \left(\sqrt{11}\right)^2 = 11$ и $7 < 11$. Поэтому

$$\sqrt{7} - \sqrt{11} < 0, \text{ т. е. } \left|\sqrt{7} - \sqrt{11}\right| = \sqrt{11} - \sqrt{7}.$$

Окончательно получаем: $\left(\sqrt{11} - \sqrt{7}\right)\left(\sqrt{3} - \sqrt{5}\right)^2 \sqrt{\left(\sqrt{7} - \sqrt{11}\right)\left(\sqrt{3} - \sqrt{5}\right)}$.

в) Так как $a^4 \geq 0$, то корень определен, если $-b^{11} \geq 0$, т. е. $b^{11} \leq 0, b \leq 0$.

$$-\sqrt{a^4\left(-b^5\right)^2(-b)} = -a^2\left(-b^5\right)\sqrt{-b} = a^2b^5\sqrt{-b}.$$

г) $\sqrt{21(xy)^2} = |xy|\sqrt{21} = -xy\sqrt{21}$. ▲

Пример 3. Внесите множитель под знак корня:

а) $\left(5 - \sqrt{37}\right)\sqrt{\sqrt{2} + 3}$; б) $(2a - 1)\sqrt{1 - 2a}$; в) $-3xy\sqrt{-\dfrac{1}{(xy)^3}}$.

Δ При решении этих примеров используем формулу $\sqrt{a^2} = |a|$.

а) Число $5 - \sqrt{37} < 0$, т. к. $5^2 = 25$, $\left(\sqrt{37}\right)^2 = 37$ и $25 < 37$. Поэтому $\left(5 - \sqrt{37}\right)\sqrt{\sqrt{2} + 3} = -\left(\sqrt{37} - 5\right)\sqrt{\sqrt{2} + 3} = -\sqrt{\left(\sqrt{37} - 5\right)^2\left(\sqrt{2} + 3\right)}$.

б) Корень $\sqrt{1 - 2a}$ определен, если $1 - 2a \geq 0, 2a \leq 1, a \leq \dfrac{1}{2}$. При таких a выражение $2a - 1 < 0$. Поэтому

$$(2a - 1)\sqrt{1 - 2a} = -(1 - 2a)\sqrt{1 - 2a} = -\sqrt{(1 - 2a)^2(1 - 2a)} = -\sqrt{(1 - 2a)^3}.$$

в) Корень $\sqrt{-\dfrac{1}{(xy)^3}}$ определен, если $xy < 0$. Поэтому

$$-3xy\sqrt{-\frac{1}{(xy)^3}} = 3(-xy)\sqrt{-\frac{1}{(xy)^3}} = \sqrt{9(-xy)^2\left(-\frac{1}{(xy)^3}\right)} = \sqrt{\frac{-9}{xy}}.$$

Пример 4. Сравните числа a и b:

а) $a = \sqrt{3} + \sqrt{11}$ и $b = \sqrt{6} + \sqrt{8}$;

б) $a = 2 - \sqrt{3}$ и $b = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$;

в) $a = \dfrac{2}{5 + 3\sqrt{3}} - \dfrac{2}{5 - 3\sqrt{3}}$ и $b = \sqrt{110}$.

Δ а) Числа a и b положительные. Рассмотрим квадраты этих чисел. Имеем: $a^2 = 3 + 2\sqrt{3}\sqrt{11} + 11 = 14 + 2\sqrt{33}$, $b^2 = 6 + 2\sqrt{6}\sqrt{8} + 8 = 14 + 2\sqrt{48}$. Так как $48 > 33$, то $\sqrt{48} > \sqrt{33}, 2\sqrt{48} > 2\sqrt{33}$, поэтому $b^2 > a^2$ и $b > a$.

б) Число $a > 0$, т. к. $2^2 > \left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$. Число $7 - 4\sqrt{3} > 0$, т. к. $7^2 > \left(4\sqrt{3}\right)^2 = 48$. Число b определено и оно больше нуля.

Следовательно, оба числа a и b положительные. Рассмотрим их квадраты. $a^2 = \left(2 - \sqrt{3}\right)^2 = 4 - 4\sqrt{3} + 3 = 7 - 4\sqrt{3}$, $b^2 = 7 - 4\sqrt{3}$. Следовательно, $a = b$.

в) $a = \dfrac{2}{5 + 3\sqrt{3}} - \dfrac{2}{5 - 3\sqrt{3}}$.

Приводим дроби к общему знаменателю, получаем:

$$\frac{10 - 6\sqrt{3} - 10 - 6\sqrt{3}}{\left(5 + 3\sqrt{3}\right)\left(5 - 3\sqrt{3}\right)} = \frac{-12\sqrt{3}}{-2} = 6\sqrt{3} = \sqrt{108}.$$

Так как $110 > 108$, то $\sqrt{110} > \sqrt{108}$, поэтому $b > a$.

Пример 5. Освободиться от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\dfrac{2}{3\sqrt{5}-\sqrt{7}}$; б) $\dfrac{1+\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}+\sqrt{5}}$.

Δ Эту задачу надо понимать так: следует так преобразовать дробь, чтобы в знаменателе отсутствовали квадратные корни.

При решении этих задач полезно использовать формулу

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2.$$

а) Умножим числитель и знаменатель дроби на $3\sqrt{5}+\sqrt{7}$, получаем:

$$\frac{2\left(3\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)}{\left(3\sqrt{5}-\sqrt{7}\right)\left(3\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)}=\frac{6\sqrt{5}+2\sqrt{7}}{\left(3\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2}=\frac{6\sqrt{5}+2\sqrt{7}}{45-49}=-\frac{3\sqrt{5}+7}{2}.$$

б) Умножим числитель и знаменатель дроби на выражение $\left(3-\sqrt{2}\right)-\sqrt{5}$, получаем: $\dfrac{\left(1+\sqrt{2}\right)\left(\left(3-\sqrt{2}\right)-\sqrt{5}\right)}{\left(\left(3-\sqrt{2}\right)+\sqrt{5}\right)\left(\left(3-\sqrt{2}\right)-\sqrt{5}\right)}=$

$$=\frac{3-\sqrt{2}-\sqrt{5}+3\sqrt{2}-2-\sqrt{10}}{\left(9+2-6\sqrt{2}\right)-5}=\frac{1+2\sqrt{2}-\sqrt{5}-\sqrt{10}}{6\left(1-\sqrt{2}\right)}.$$

В полученной дроби умножаем числитель и знаменатель на $1+\sqrt{2}$, получаем: $\dfrac{\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1+2\sqrt{2}-\sqrt{5}-\sqrt{10}\right)}{6(1-2)}=$

$$=-\frac{1+\sqrt{2}+2\sqrt{2}+4-\sqrt{5}-\sqrt{10}-\sqrt{10}-\sqrt{20}}{6}=$$

$$=-\frac{5+3\sqrt{2}-3\sqrt{5}-2\sqrt{10}}{6}.\ \blacktriangle$$